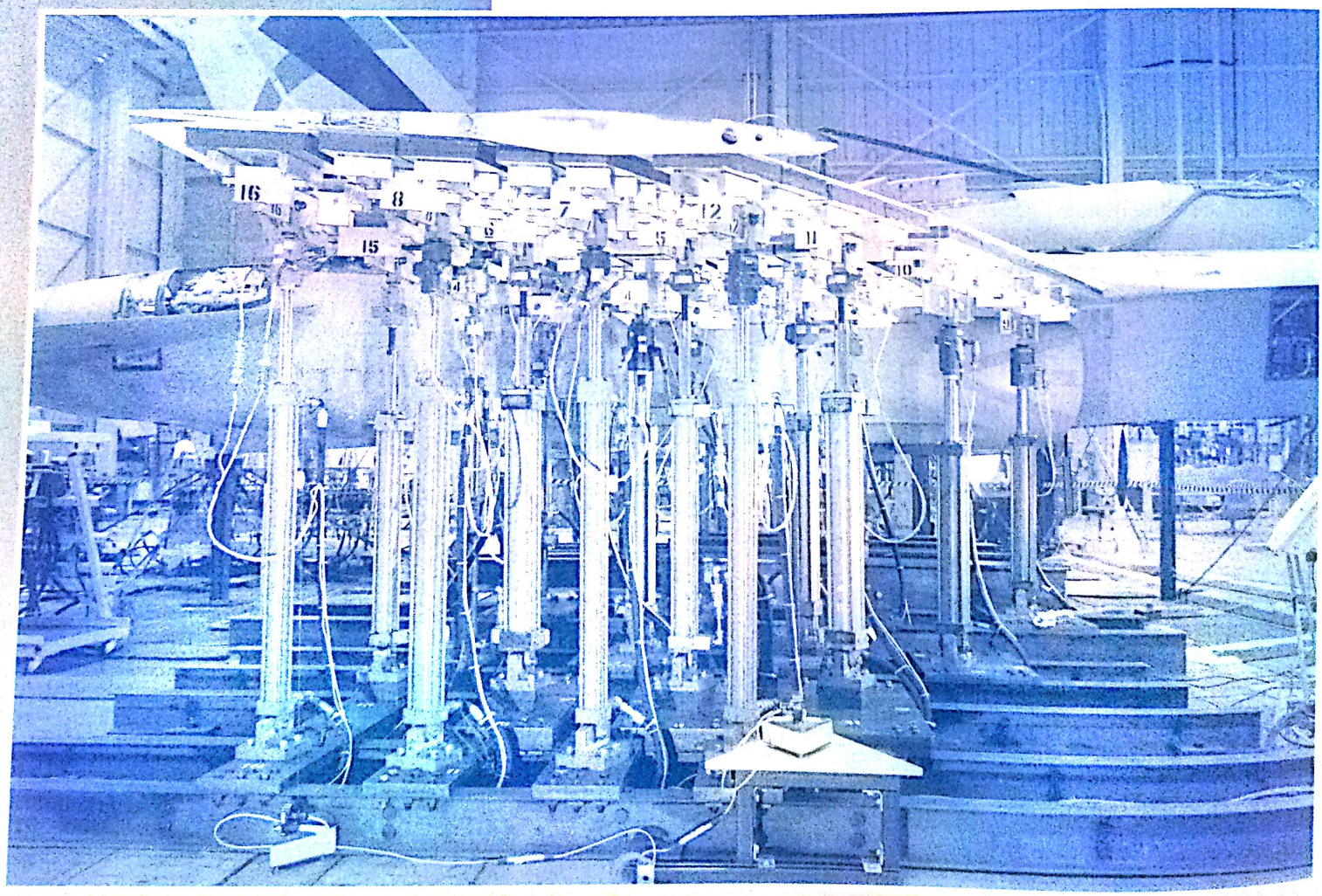
CAPÍTULO

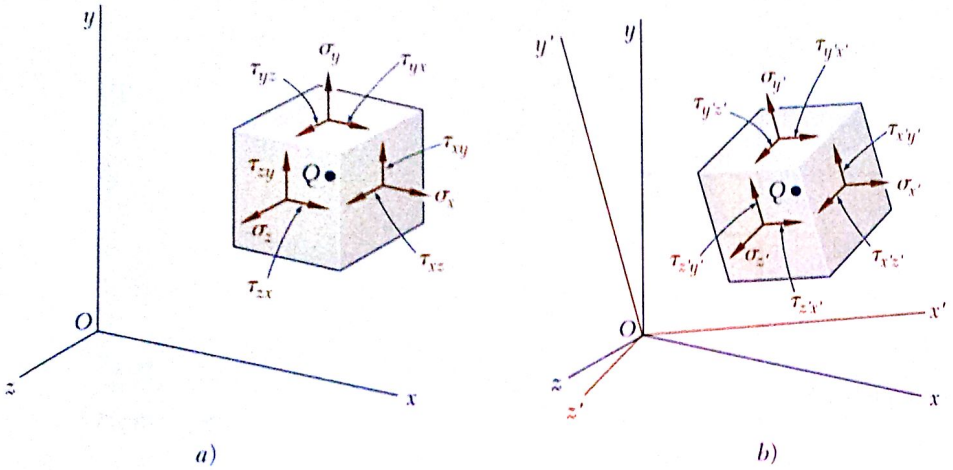
7 Transformaciones de esfuerzos y deformaciones



El avión de la fotografía se prueba para determinar la forma en que las fuerzas de elevación se distribuyen en el ala. En este capítulo se estudian los esfuerzos y deformaciones en estructuras y componentes de máquinas.

7.1 INTRODUCCIÓN

En la sección 1.12 se estudió que el estado más general de esfuerzo en un punto dado Q puede representarse por seis componentes. Tres de éstas, σ_x, σ_y y σ_z, definen los esfuerzos normales ejercidos sobre las caras de un elemento cúbico centrado en Q y con la misma orientación de los ejes coordenados (figura 7.1*a*) y las otras tres, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx},[†] las componentes de los esfuerzos cortantes del mismo elemento. Como se observó entonces, el mismo estado de esfuerzos se representará mediante un conjunto diferente de componentes si se giran los ejes (figura 7.1*b*). En la primera parte de este capítulo se va a determinar cómo se transforman las componentes de los esfuerzos cuando se giran los ejes coordenados. En la segunda parte del capítulo se realizará un análisis similar de la transformación de los componentes de la deformación.



a) *b)*

Figura 7.1

El análisis de la transformación de esfuerzos tratará principalmente con el *esfuerzo plano*, es decir, con una situación en la cual dos caras del cubo están libres de esfuerzo. Si el eje z se elige perpendicular a estas caras, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y las únicas componentes restantes son σ_x, σ_y y τ_{xy} (figura 7.2). Tal situación ocurre en una placa delgada sometida a fuerzas que actúan en su plano medio (figura 7.3). También ocurre en la superficie libre de un elemento estructural o elemento de máquina, es decir, en cualquier punto de la superficie de ese elemento o componente que no está sujeto a una fuerza externa (figura 7.4).

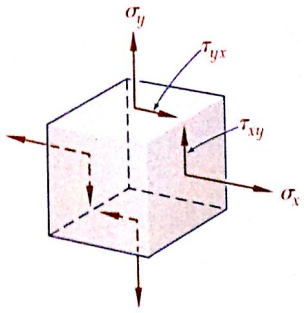


Figura 7.2

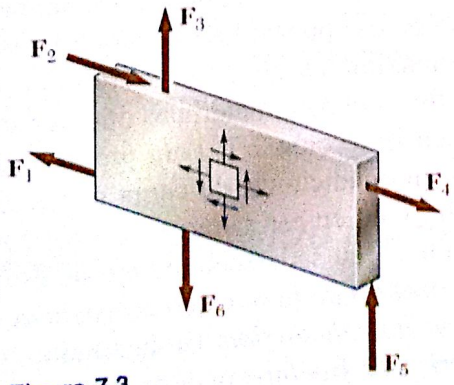


Figura 7.3

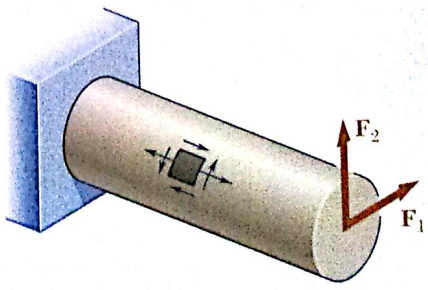


Figura 7.4

[†] Recuérdese que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ y $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Considerando (sección 7.2) un estado de *esfuerzo plano* en un punto dado Q caracterizado por los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} asociados con el elemento mostrado en la figura 7.5*a*, se aprenderá a determinar los componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con ese elemento después que ha girado un ángulo θ alrededor del eje z (figura 7.5*b*). En la sección 7.3 se definirá el valor θ_p de θ para el cual los esfuerzos $\sigma_{x'}$ y $\sigma_{y'}$ son, respectivamente, máximo y mínimo; estos valores del esfuerzo normal son los *esfuerzos principales* en el punto Q, y las caras del elemento correspondiente definen los *planos principales de esfuerzo* en ese punto. También se establecerá el valor θ_s del ángulo de rotación para el cual el esfuerzo cortante es máximo, así como el valor de dicho esfuerzo.

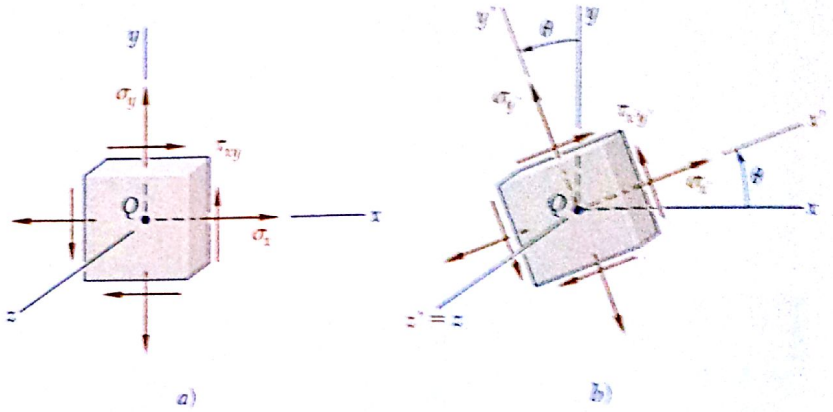


Figura 7.5

En la sección 7.4 se presentará un método alternativo para la solución de problemas que implican transformación de esfuerzo plano, basado en el uso del *círculo de Mohr*.

En la sección 7.5, se estudiará un *estado de esfuerzo tridimensional* en un punto dado y se desarrollará una ecuación para el cálculo del esfuerzo plano normal en un plano de orientación arbitraria en ese punto. En la sección 7.6 se analizarán las rotaciones de un elemento cúbico con respecto a cada uno de los ejes principales de esfuerzos y se aprenderá que las transformaciones pueden describirse mediante tres círculos de Mohr diferentes. Se observará también que, en el caso de un estado de *esfuerzo plano* en un punto dado, el máximo valor del esfuerzo cortante, obtenido antes considerando rotaciones en el plano de esfuerzo, no representa necesariamente el esfuerzo cortante máximo en ese punto. Eso llevará a considerar la diferencia entre esfuerzo cortante máximo *en el plano* y *fuera del plano*.

Varios *criterios de fluencia* para materiales dúctiles sometidos a esfuerzo plano se desarrollarán en la sección 7.7. Para predecir si un material fluirá en algún punto crítico, en condiciones de carga dadas, se determinarán los esfuerzos principales, σ_a y σ_b en ese punto y se verificará si σ_a, σ_b y el límite de fluencia σ_Y del material satisfacen alguno de esos criterios. Dos criterios comunes son: el *criterio de la máxima resistencia a cortante* y el *criterio de la máxima energía de distorsión*. En la sección 7.8 se desarrollarán, en forma similar, *criterios de fractura* para materiales frágiles sometidos a un esfuerzo plano; ellos agruparán los esfuerzos principales σ_a y σ_b en algún punto crítico y la resistencia última σ_U del material. Los dos criterios que se analizarán son: el *esfuerzo normal máximo* y el *criterio de Mohr*.

Los recipientes a presión de pared delgada son una importante aplicación del análisis de esfuerzo plano. En la sección 7.9 se analizarán los esfuerzos en recipientes cilíndricos y esféricos (véanse figuras 7.6 y 7.7).

Figura 7.6

Figura 7.7

En las secciones 7.10 y 7.11 se examinan *la transformación de deformación plana* y *el círculo de Mohr para la deformación plana*. En la sección 7.12 se verá el análisis tridimensional de la deformación y cómo pueden usarse los círculos de Mohr para determinar la deformación por cortante máximo en un punto dado. Dos casos particulares son de especial interés y no deben confundirse: el caso de *deformación plana* y el caso de *esfuerzo plano*.

Finalmente, en la sección 7.13 se analizará el uso de *galgas extensiométricas* para medir la deformación normal en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina. Se verá cómo las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, que caracterizan un estado de deformación en un punto dado, pueden calcularse a partir de las medidas efectuadas en tres galgas extensiométricas que forman una *roseta de deformación*.

7.2 TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZO PLANO

Suponga que existe un estado de esfuerzo plano en el punto Q (con $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), y definido por las componentes σ_x, σ_y y τ_{xy}, asociadas con el elemento de la figura 7.5*a*. Se pide determinar las componentes del esfuerzo $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con el elemento después que ha girado un ángulo θ con respecto al eje z (figura 7.5*b*), y expresar estas componentes en función de σ_x, σ_y, τ_{xy} y θ.

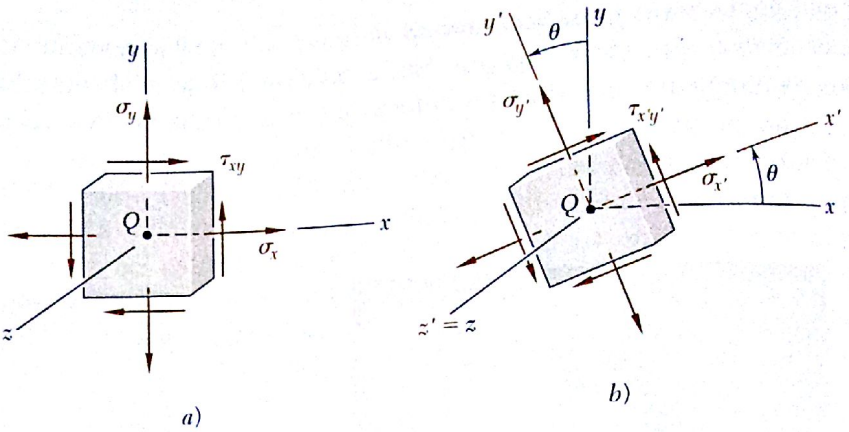


Figura 7.5 (repetida)

Con el objeto de determinar el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ y el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ ejercidos sobre la cara perpendicular al eje x', se estudiará un elemento prismático con caras respectivamente perpendiculares a los ejes x, y y x' (figura 7.8*a*). Observe que, si el área de la cara oblicua es ΔA, las áreas de las caras vertical y horizontal son, respectivamente, iguales a $\Delta A \cos \theta$ y ΔA sen θ. De ahí se sigue que las *fuerzas* ejercidas sobre las tres caras son las que muestra la figura 7.8*b*. (No se ejercen fuerzas sobre las caras triangulares del elemento, pues los esfuerzos normales y cortantes correspondientes se han supuesto nulos.) Usando componentes a lo largo de los ejes x' y y', se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio:

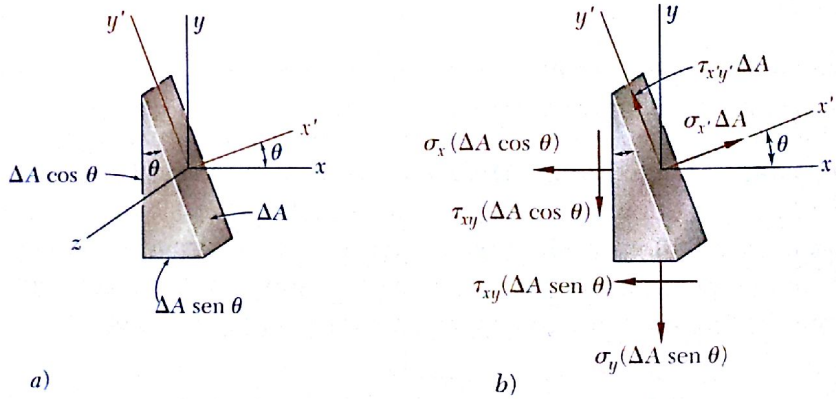


Figura 7.8

$$\Sigma F_{x'} = 0: \quad \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x(\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy}(\Delta A \cos \theta) \text{ sen } \theta - \sigma_y(\Delta A \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta - \tau_{xy}(\Delta A \text{ sen } \theta) \cos \theta = 0$$

$$\Sigma F_{y'} = 0: \quad \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x(\Delta A \cos \theta) \text{ sen } \theta - \tau_{xy}(\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y(\Delta A \text{ sen } \theta) \cos \theta + \tau_{xy}(\Delta A \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta = 0$$

Resolviendo la primera ecuación para $\sigma_{x'}$ y la segunda para $\tau_{x'y'}$, se tiene:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tag{7.1}$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \tag{7.2}$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \tag{7.3}$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{7.4}$$

la ecuación (7.1) se escribe como sigue:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

o

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.5}$$

Usando las relaciones (7.3) se tiene la ecuación (7.2) como

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{7.6}$$

La expresión para el esfuerzo normal $\sigma_{y'}$ se obtiene remplazando θ en la ecuación (7.5) por el ángulo $\theta + 90°$ que el eje y' forma con el eje x. Como cos $(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y sen $(2\theta + 180°) = -\operatorname{sen} 2\theta$, se tiene

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{7.7}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7.5) y (7.7)

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \tag{7.8}$$

Como $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$, se verifica que la suma de los esfuerzos normales ejercidos sobre un elemento cúbico de material es independiente de la orientación del elemento.[†]

[†] Véase nota en la página 88.

7.3 ESFUERZOS PRINCIPALES. ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO

Las ecuaciones (7.5) y (7.6) obtenidas en la sección precedente son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se escoge un sistema de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenadas $\tau_{x'y'}$ para cualquier valor de θ, los puntos así obtenidos estarán situados en un círculo. Para comprobarlo, se elimina θ de las ecuaciones (7.5) y (7.6). Esto se hace trasponiendo primero $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ecuación (7.5) y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, luego se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación (7.6) y, finalmente, se suman miembro a miembro las ecuaciones resultantes. Se tiene

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \tag{7.9}$$

haciendo

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.10}$$

se escribe la identidad (7.9) en la forma

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{prom}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \tag{7.11}$$

que es la ecuación de un círculo de radio R con centro en el punto C de abscisa σ_{prom} y ordenada 0 (figura 7.9). Puede observarse que, debido a la simetría del círculo con respecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si, en lugar de graficar M, se hubiera graficado un punto N de abscisa $\sigma_{x'}$ y ordenada $-\tau_{x'y'}$ (figura 7.10). Esta propiedad se usará en la sección 7.4.

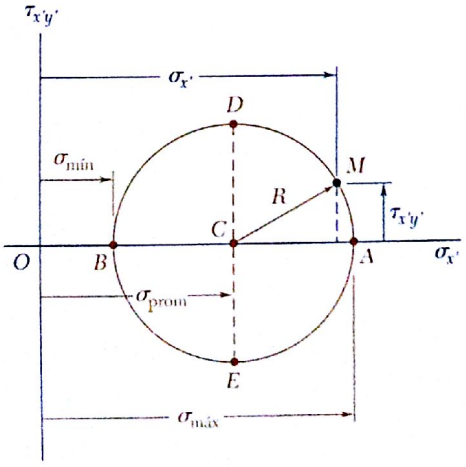


Figura 7.9

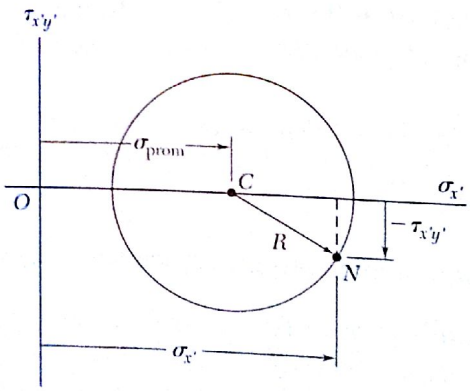


Figura 7.10

Los puntos A y B, donde el círculo de la figura 7.9 interseca el eje horizontal, son de especial interés: el punto A corresponde al valor máximo del esfuerzo normal $\sigma_{x'}$, mientras el punto B corresponde a su valor mínimo.

Además, ambos puntos tienen un valor nulo del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$. Así, los valores θ_p del parámetro θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse haciendo $\tau_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.6). Se escribe[†]

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.12}$$

Esta ecuación define dos valores $2\theta_p$ que difieren en 180° y, por tanto, dos valores θ_p que difieren en 90°. Cualquiera de estos valores puede usarse para determinar la orientación del elemento correspondiente (figura 7.11). Los planos que contienen las caras del elemento obtenido se llaman *planos principales de esfuerzo* en el punto Q, y los valores correspondientes $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ del esfuerzo normal ejercido sobre estos planos son los *esfuerzos principales* en Q. Como los dos valores θ_p, definidos por la ecuación (7.12), se obtuvieron haciendo $\tau_{x'y'} = 0$ en la ecuación (7.6), es claro que no hay esfuerzo cortante en los planos principales.

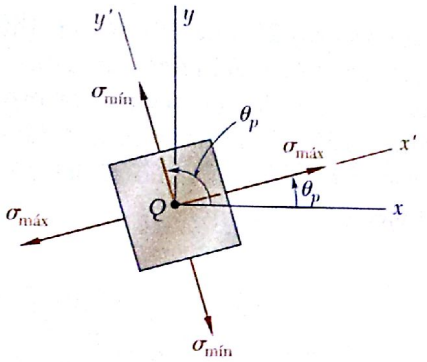


Figura 7.11

Observe en la figura 7.9 que

$$\sigma_{máx} = \sigma_{prom} + R \qquad \text{y} \qquad \sigma_{mín} = \sigma_{prom} - R \tag{7.13}$$

Sustituyendo por σ_{prom} y R de la ecuación (7.10),

$$\sigma_{máx,\,mín} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.14}$$

A menos que sea posible decir por inspección cuál de los dos planos se somete a $\sigma_{máx}$ y cuál a $\sigma_{mín}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_p en la ecuación (7.5) para determinar cuál de los dos corresponde al valor máximo del esfuerzo normal.

Refiriéndose de nuevo al círculo de la figura 7.9, se observa que los puntos D y E, localizados en el diámetro vertical del círculo, corresponden al mayor valor numérico del esfuerzo $\tau_{x'y'}$. Puesto que la abscisa de los puntos D y E es $\sigma_{prom} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, los valores θ_s del parámetro θ que corresponden a estos puntos se obtienen haciendo $\sigma_{x'} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ en la ecuación

[†] Esta relación también se obtiene diferenciando $\sigma_{x'}$ en la ecuación (7.5) y haciendo la derivada igual a cero: $d\sigma_{x'}/d\theta = 0$.

(7.5). De ahí se tiene que la suma de los últimos dos términos en esa ecuación debe ser cero. Así, para $\theta = \theta_s$, se escribe[†]

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_s + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta_s = 0$$

o

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.15}$$

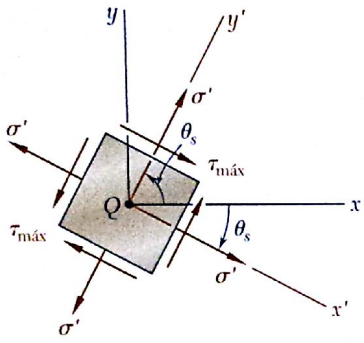


Figura 7.12

Esta ecuación define dos valores $2\theta_s$ que difieren en 180°, y por tanto dos valores de θ_s que difieren en 90°. Cualquiera de estos valores puede usarse para determinar la orientación del elemento correspondiente al esfuerzo cortante máximo (figura 7.12). Al observar en la figura 7.9 que el valor máximo del esfuerzo cortante es igual al radio R del círculo y, recordando la segunda de las ecuaciones (7.10), se tiene:

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{7.16}$$

Como se observó antes, el esfuerzo normal correspondiente a la condición de esfuerzo cortante máximo es

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{7.17}$$

Comparando las ecuaciones (7.12) y (7.15) se nota que tan $2\theta_s$ es el inverso negativo de tan $2\theta_p$, lo cual significa que los ángulos $2\theta_s$ y $2\theta_p$ difieren en 90° y, por tanto, que θ_s y θ_p difieren en 45°. Así se concluye que los *planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales.* Esto confirma los resultados obtenidos en la sección 1.12 para el caso de carga axial céntrica (figura 1.40) y en la sección 3.4, para el caso de carga torsional (figura 3.20).

Se debe estar consciente de que el análisis sobre la transformación de esfuerzo plano se ha limitado a las rotaciones *en el plano de esfuerzo*. Si el elemento cúbico de la figura 7.7 se gira con respecto a un eje distinto del eje z, sus caras pueden someterse a esfuerzos cortantes mayores que los dados por la ecuación (7.16). Como se verá en la sección 7.5, esto ocurrirá cuando los esfuerzos principales definidos por la ecuación (7.14) tengan el mismo signo, es decir, cuando ambos sean de tensión o ambos de compresión. En tales casos, el valor obtenido mediante la ecuación (7.16) se refiere al esfuerzo cortante máximo *en el plano*.

[†] Esta relación también se obtiene diferenciando $\tau_{x'y'}$ en la ecuación (7.6) y haciendo la derivada igual a cero: $d\tau_{x'y'}/d\theta = 0$.

EJEMPLO 7.01

Para el estado de esfuerzo plano de la figura 7.13, determine: *a*) los planos principales, *b*) los esfuerzos principales, *c*) el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

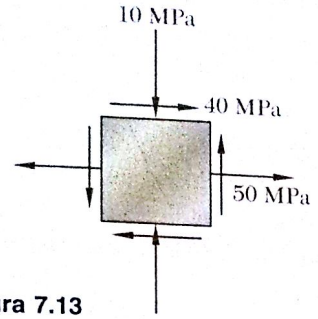


Figura 7.13

a) Planos principales. Siguiendo la convención usual de signos, las componentes del esfuerzo se escriben como

$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = -10 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

Sustituyendo en la ecuación (7.12)

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53.1° \quad \text{y} \quad 180° + 53.1° = 233.1°$$

$$\theta_p = 26.6° \quad \text{y} \quad 116.6°$$

b) Esfuerzos principales. La ecuación (7.14) da

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Los planos principales y los esfuerzos principales se esquematizan en la figura 7.14. Haciendo $\theta = 26.6°$ en la ecuación (7.5), se verifica que el esfuerzo normal en la cara BC del elemento es el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{x'} = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53.1° + 40 \operatorname{sen} 53.1°$$

$$= 20 + 30 \cos 53.1° + 40 \operatorname{sen} 53.1° = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\text{máx}}$$

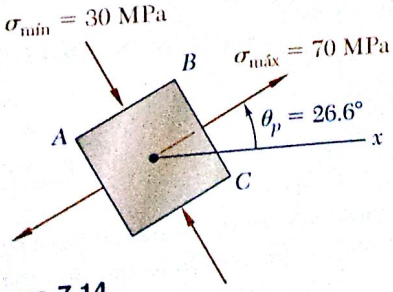


Figura 7.14

c) Esfuerzos cortantes máximos. De la ecuación (7.16):

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

Puesto que $\sigma_{\text{máx}}$ y $\sigma_{\text{mín}}$ tienen signos opuestos, el valor obtenido para $\tau_{\text{máx}}$ representa el valor máximo del esfuerzo cortante en el punto considerado. La orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo y el sentido de los esfuerzos cortantes se determinan mejor efectuando un corte a lo largo del plano diagonal AC del elemento de la figura 7.14. Como los planos principales contienen las caras AB y BC del elemento, el plano diagonal AC debe ser uno de los planos de esfuerzo cortante máximo (figura 7.15). Además, las condiciones de equilibrio para el elemento prismático ABC requieren que los esfuerzos cortantes en AC estén dirigidos como se indica. En la figura 7.16 se muestra el elemento cúbico correspondiente al esfuerzo cortante máximo. El esfuerzo normal en cada una de las cuatro caras del elemento lo da la ecuación (7.17):

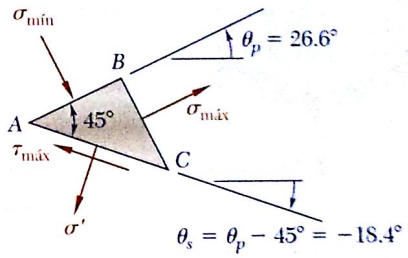


Figura 7.15

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2} = 20 \text{ MPa}$$

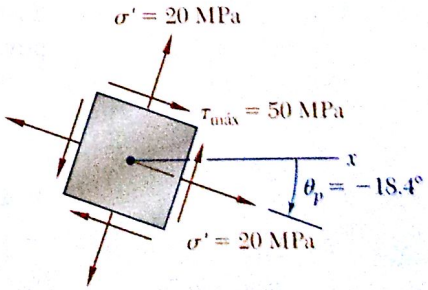
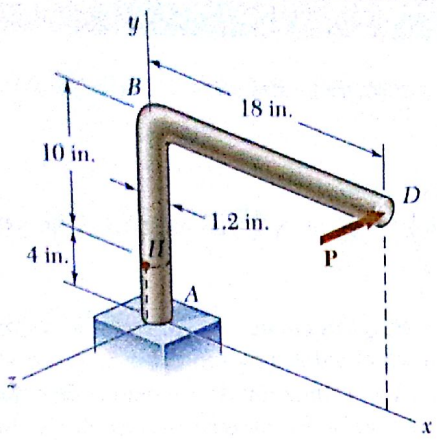
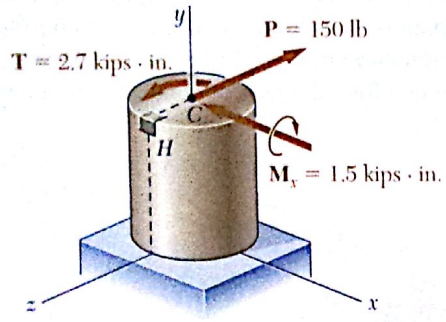


Figura 7.16



PROBLEMA MODELO 7.1

Una fuerza única horizontal de magnitud **P** = 150 lb se aplica el extremo *D* de la palanca *ABD*. Sabiendo que la porción *AB* de la palanca tiene un diámetro de 1.2 in., determine: *a*) los esfuerzos normal y cortante en un elemento situado en el punto *H*, con lados paralelos a los ejes *x* y *y*, *b*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H*.

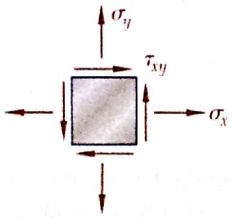


SOLUCIÓN

Sistema de par de fuerzas. Se remplaza la fuerza **P** por un sistema equivalente de par de fuerzas en el centro *C* de la sección transversal que contiene al punto *H*:

$$P = 150 \text{ lb} \qquad T = (150 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = 2.7 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$
$$M_x = (150 \text{ lb})(10 \text{ in.}) = 1.5 \text{ kips} \cdot \text{in.}$$

***a*) Esfuerzos σ_x, σ_y, τ_{xy} en el punto H.** Usando la convención de signos mostrada en la figura 7.2, se determina el sentido y el signo de cada componente del esfuerzo examinando cuidadosamente el esquema del sistema de par de fuerzas en el punto *C*:

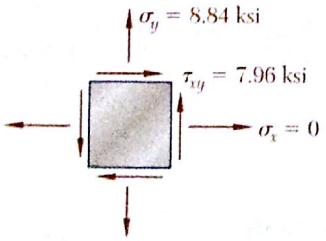


$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = +\frac{Mc}{I} = +\frac{(1.5 \text{ kips} \cdot \text{in.})(0.6 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi\,(0.6 \text{ in.})^4} \qquad \sigma_y = +8.84 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$\tau_{xy} = +\frac{Tc}{J} = +\frac{(2.7 \text{ kips} \cdot \text{in.})(0.6 \text{ in.})}{\frac{1}{2}\pi\,(0.6 \text{ in.})^4} \qquad \tau_{xy} = +7.96 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Note que la fuerza cortante **P** no causa esfuerzo cortante en *H*.

***b*) Planos principales y esfuerzos principales.** Sustituyendo los valores de los esfuerzos en la ecuación (7.12), se determina la orientación de los planos principales:

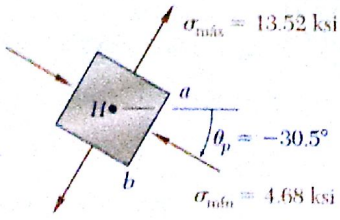


$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.80$$

$$2\theta_p = -61.0° \qquad \text{y} \qquad 180° - 61.0° = +119°$$

$$\theta_p = -30.5° \qquad \text{y} \qquad +59.5° \blacktriangleleft$$

Sustituyendo en la ecuación (7.14), se establecen las magnitudes de los esfuerzos principales:



$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2} = +4.42 \pm 9.10$$

$$\sigma_{\text{máx}} = +13.52 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_{\text{mín}} = -4.68 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

Considerando la cara *ab* del elemento mostrado en la figura, se hace $\theta_p = -30.5°$ en la ecuación (7.5) y se halla $\sigma_{x'} = -4.68$ ksi. Se concluye que los esfuerzos principales son los que se muestran.

PROBLEMAS

7.1 a 7.4 Para el estado de esfuerzo dado, determine los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre la cara oblicua del elemento triangular sombreado que se muestra en la figura. Use un método de análisis basado en las ecuaciones de equilibrio de dicho elemento, como se hizo en las deducciones de la sección 7.2.

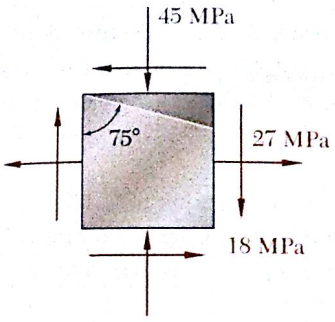


Figura P7.1

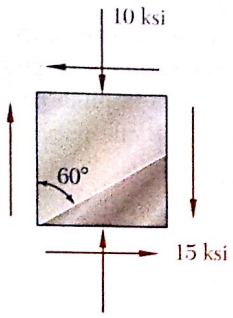


Figura P7.2

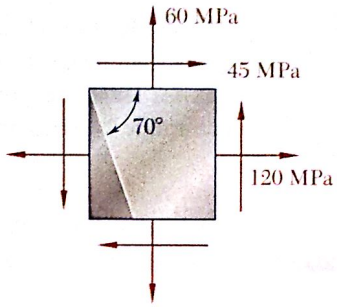


Figura P7.3

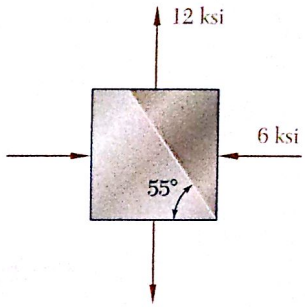


Figura P7.4

7.5 a 7.8 Para el estado de esfuerzo dado, determine *a*) los planos principales, *b*) los esfuerzos principales.

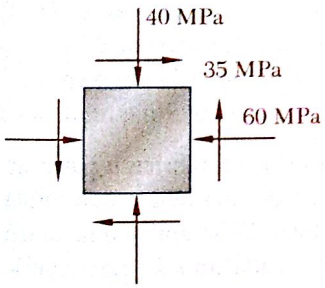


Figura P7.5 y P7.9

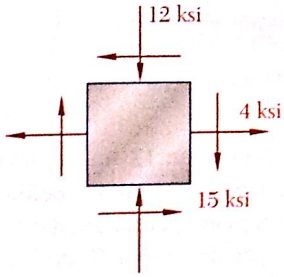


Figura *P7.6* y P7.10

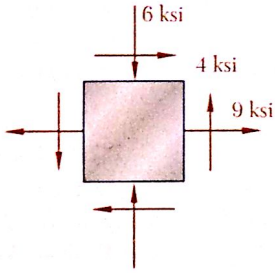


Figura *P7.7* y P7.11

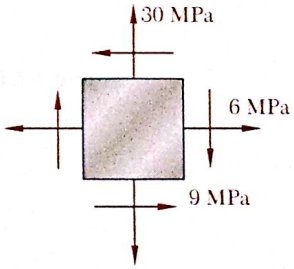


Figura P7.8 y P7.12

7.9 a 7.12 Para el estado de esfuerzo dado, determine *a*) la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo, *b*) el esfuerzo normal correspondiente.

***7.13* a 7.16** Para el estado de esfuerzo dado, determine los esfuerzos normal y cortante después de girar el elemento mostrado *a*) 25° en el sentido de las manecillas del reloj, *b*) 10° en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

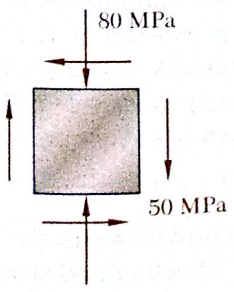


Figura *P7.13*

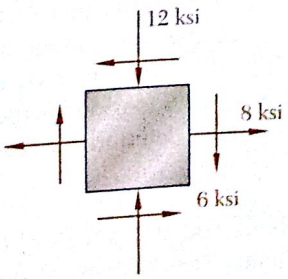


Figura P7.14

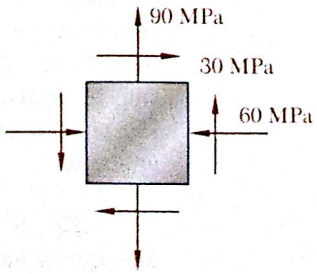


Figura *P7.15*

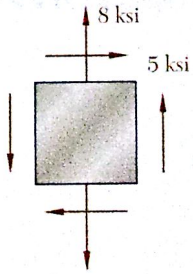


Figura P7.16

7.17 y 7.18 La fibra de un elemento de madera forma un ángulo de 15° con la vertical. Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la fibra, *b*) el esfuerzo normal perpendicular a la fibra.

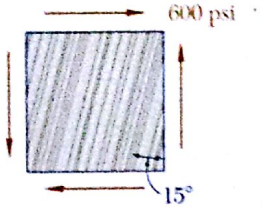


Figura P7.17

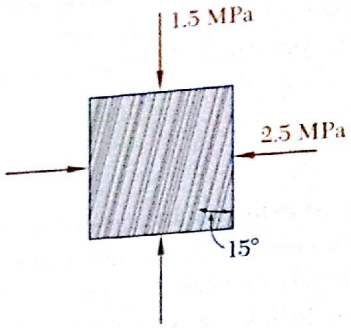


Figura P7.18

7.19 Dos elementos de sección transversal uniforme de 50 × 80 mm se pegan a lo largo del plano *a*-*a* que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Si se sabe que los esfuerzos permisibles para la junta pegada son $\sigma = 800$ kPa $\tau = 600$ kPa, determine la carga axial máxima **P** que puede aplicarse.

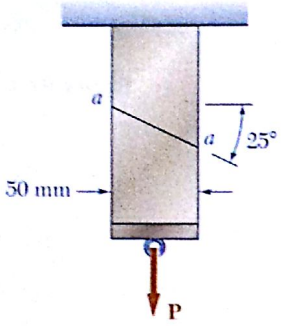


Figura *P7.19*

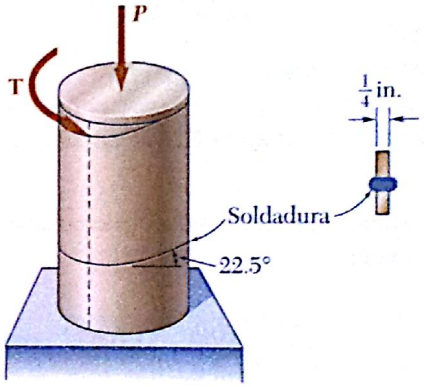


Figura P7.20

7.20 Un tubo de acero con 12 in. de diámetro exterior se fabrica a partir de una placa con $\frac{1}{4}$ in. de espesor, la cual se suelda a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 22.5° con un plano perpendicular al eje del tubo. Si se aplica una fuerza axial **P** de 40 kips y un par de torsión **T** de 80 kips · in., cada uno de ellos con la dirección mostrada, determine respectivamente σ y τ en las direcciones normal y tangencial a la soldadura.

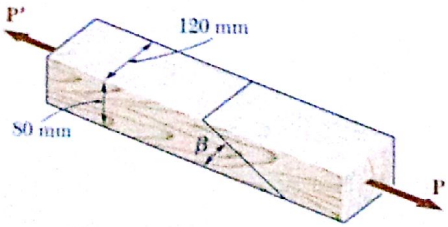


Figura *P7.21* y P7.22

7.21 Dos elementos de madera con una sección transversal uniforme de 80 × 120 mm se pegan mediante el empalme simple al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 25°$ y que se aplican cargas céntricas de magnitud $P = 10$ kN a los elementos, como se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo al empalme, *b*) el esfuerzo normal perpendicular al empalme.

7.22 Dos elementos de madera con una sección transversal uniforme de 80 ×120 mm se pegan mediante el empalme simple al sesgo que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 22°$ y que los esfuerzos máximos permisibles en la junta son, respectivamente, de 400 kPa en tensión (perpendicular al empalme) y de 600 kPa en corte (paralelo al empalme), determine la máxima carga céntrica **P** que puede aplicarse.

7.23 Se aplica una fuerza de 19.5 kN en el punto *D* del poste de hierro fundido que se muestra en la figura. Si se sabe que el poste tiene un diámetro de 60 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

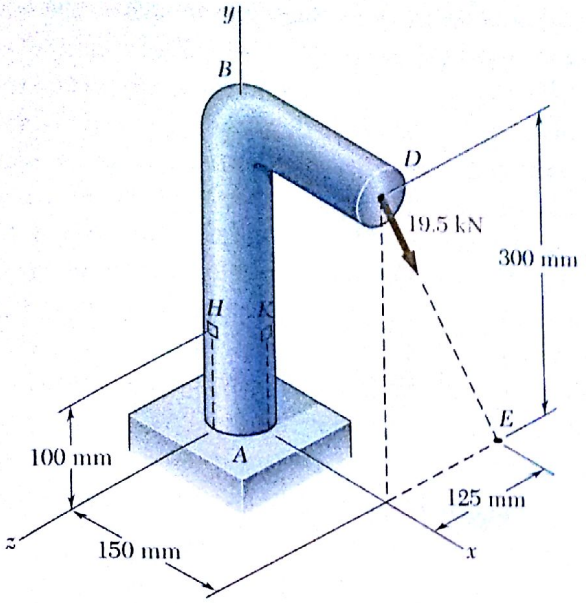


Figura P7.23 y P7.24

7.24 Se aplica una fuerza de 19.5 kN en el punto *D* del poste de hierro fundido que se muestra en la figura. Si se sabe que el poste tiene un diámetro de 60 mm, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

7.25 El eje de un automóvil está sometido a las fuerzas y al par que se muestran en la figura. Si se sabe que el diámetro del eje sólido es de 1.25 in., determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H* localizado en la parte superior del eje, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el mismo punto.

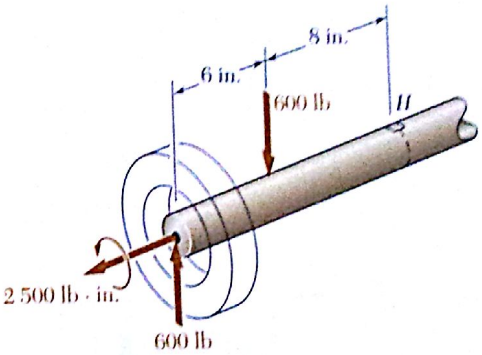


Figura P7.25

7.26 Se aplican varias fuerzas en el ensamble de tubería que se muestra en la figura. Si se sabe que los diámetros interior y exterior de la tubería son iguales a 1.50 in. y 1.75 in. respectivamente, determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H* localizado en la superficie exterior del tubo, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el mismo punto.

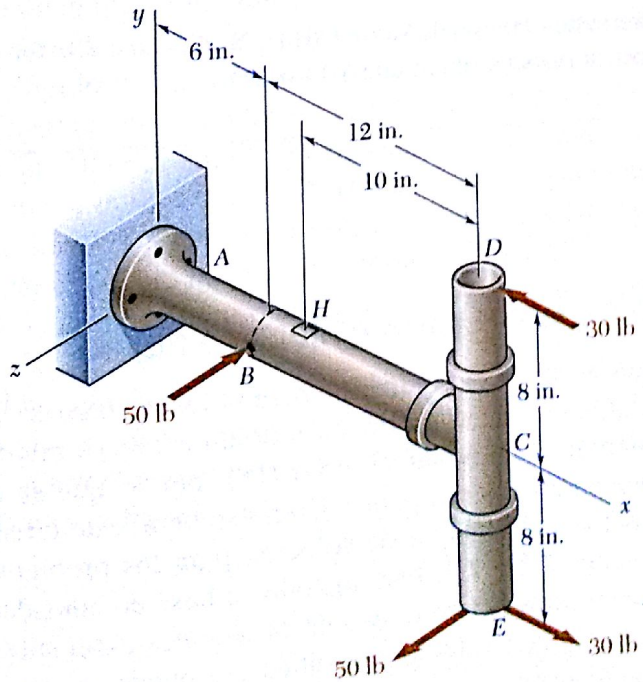


Figura P7.26

7.27 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor máximo de σ_y para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 75 MPa.

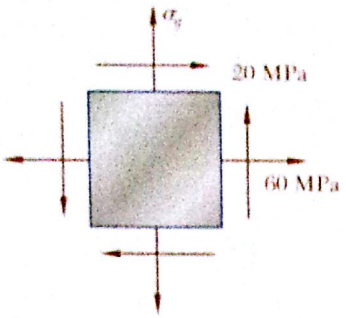


Figura P7.27

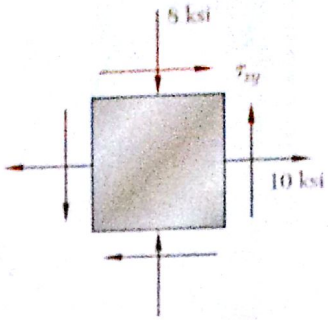


Figura *P7.28*

7.28 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor máximo de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 12 ksi, *b*) los esfuerzos principales correspondientes.

7.29 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine *a*) el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la soldadura es cero, *b*) los esfuerzos principales correspondientes.

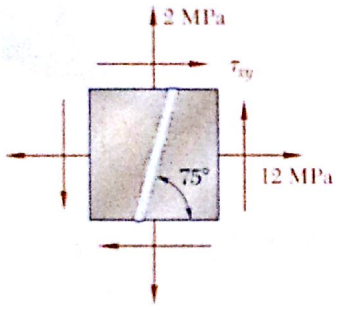


Figura P7.29

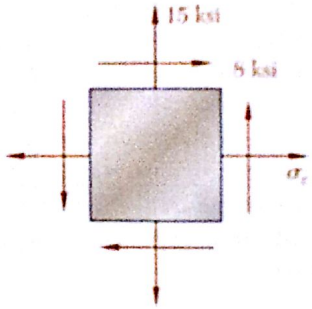


Figura *P7.30*

7.30 Determine el rango de valores de σ_x para el cual el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 10 ksi.

7.4 CÍRCULO DE MOHR PARA ESFUERZO PLANO

El círculo usado en la sección anterior para obtener algunas de las ecuaciones básicas relativas a la transformación de un esfuerzo plano lo introdujo el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), por lo que se conoce como *círculo de Mohr* para esfuerzo plano. Como se verá, este círculo puede utilizarse como método alternativo de solución para los problemas considerados en las secciones 7.2 y 7.3. Este método se basa en consideraciones geométricas simples y no requiere el uso de ecuaciones especializadas. Aunque fue diseñado para obtener soluciones gráficas, se puede aplicar muy bien empleando una calculadora.

Considere un elemento cuadrado de un material sometido a esfuerzo plano (figura 7.17*a*), y sean σ_x, σ_y y τ_{xy} las componentes del esfuerzo ejercido sobre el elemento. Dibuje un punto X de coordenas σ_x y $-\tau_{xy}$, y un punto Y de coordenadas σ_y y $+\tau_{xy}$ (figura 7.17*b*). Si τ_{xy} es positivo, como se supone en la figura 7.17*a*, el punto X está situado debajo del eje σ y el punto Y encima, como se muestra en la figura 7.17*b*. Si τ_{xy} es negativo, X se sitúa encima del eje σ y Y debajo. Uniendo X y Y mediante una línea recta se define el punto C de intersección de la línea XY con el eje σ y se dibuja el círculo de centro en C y diámetro XY. Al observar que la abscisa de C y el radio del círculo son respectivamente iguales a las cantidades σ_{prom} y R definidas por las ecuaciones (7.10), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para esfuerzo plano. Así, las abscisas de los puntos A y B, en donde el círculo interseca el eje σ, representan respectivamente los esfuerzos principales $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ en el punto considerado.

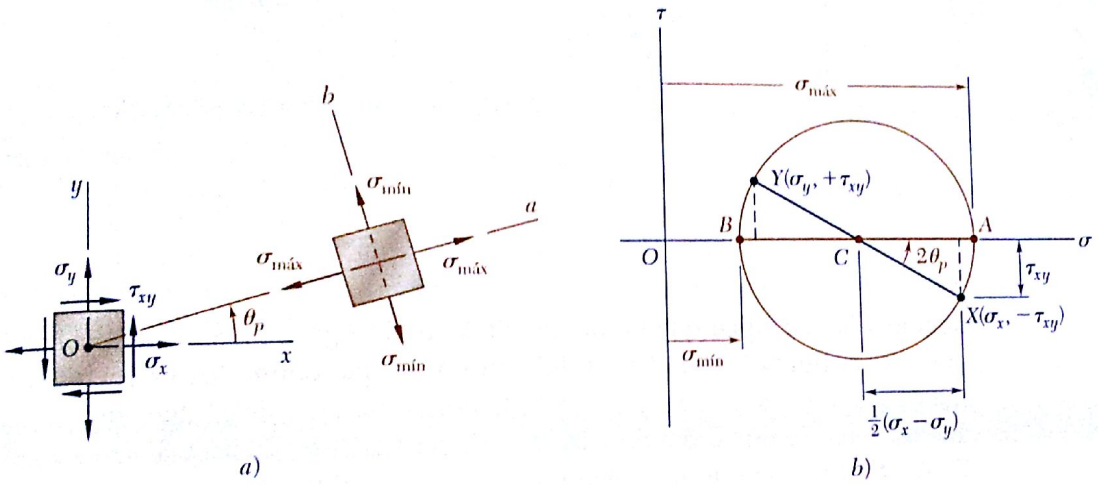


Figura 7.17

Se nota también que como $\tan(XCA) = 2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$, el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_p$ que satisfacen las ecuaciones (7.12). Así, el ángulo θ_p que define la figura 7.17*a* la orientación del plano principal correspondiente al punto A en la figura 7.17*b* puede obtenerse dividiendo entre la mitad el ángulo XCA medido en el círculo de Mohr. Observe además que si $\sigma_x > \sigma_y$ y $\tau_{xy} > 0$, como en el caso considerado aquí, la rotación que trae CX a CA es en sentido contrario a las agujas del reloj. Pero en ese caso el ángulo θ_p obtenido de la ecuación (7.12), el cual define la dirección de la normal Oa al plano principal, es positivo; por ello la rotación que trae Ox a Oa es también en sentido contrario al de las agujas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 7.17 son los mismos. Si se requiere un giro $2\theta_p$ para llevar CX a CA en el círculo Mohr, una rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj θ_p llevará Ox a Oa en la figura 7.17*a*.[†]

[†] Esto se debe al hecho de estar usando el círculo de la figura 7.10, en lugar del círculo de la figura 7.9, como círculo de Mohr.

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo puede obtenerse considerando las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$, correspondiente a los ejes x' y y' de la figura 7.18*a*. El punto X' de las coordenadas $\sigma_{x'}$ y $-\tau_{x'y'}$, y el punto Y' de coordenadas $\sigma_{y'}$ y $+\tau_{x'y'}$, están, por tanto, localizadas en el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ de la figura 7.18*b* debe ser el doble del ángulo $x'Oa$ de la figura 7.18*a*. Como el ángulo XCA es el doble del

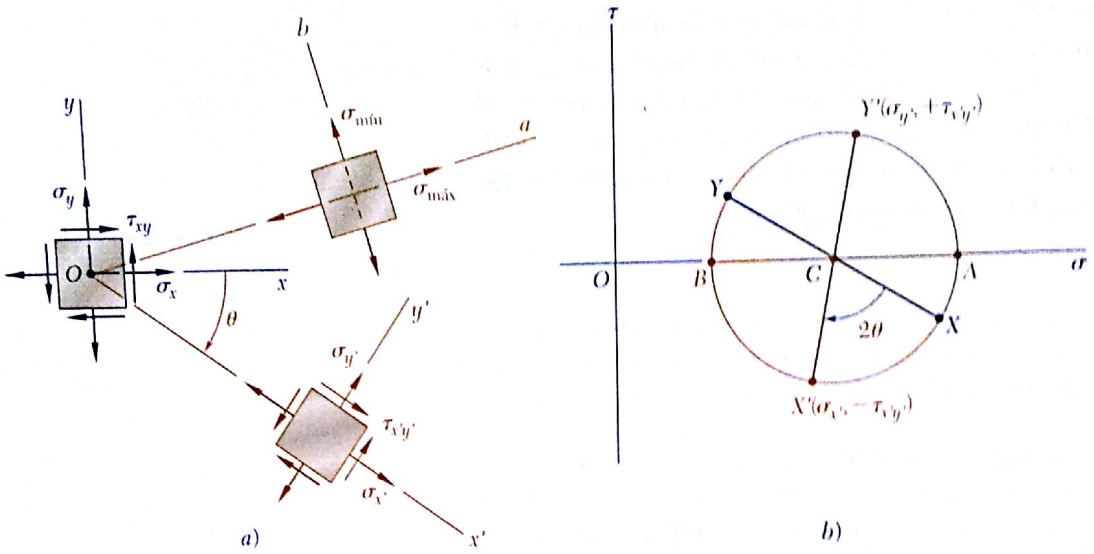


Figura 7.18

ángulo xOa, se sigue que el ángulo XCX' de la figura 7.18*b* es el doble del xOx' de la figura 7.18*a*. Así el diámetro $X'Y'$ que define los esfuerzos normales y cortantes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ puede obtenerse girando el diámetro XY un ángulo igual al doble del ángulo θ formado por los ejes x' y x de la figura 7.18*a*. Se observa que la rotación que hace coincidir el diámetro XY con el diámetro $X'Y'$, en la figura 7.18*b*, tiene igual sentido que la rotación que superpone los ejes xy a los ejes $x'y'$ en la figura 7.18*a*.

La propiedad que se acaba de indicar puede usarse para verificar el hecho de que los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales. Ciertamente, recuerde que los puntos D y E del círculo de Mohr corresponden a los planos de esfuerzo cortante máximo, mientras A y B corresponden a los planos principales (figura 7.19*b*). Puesto que los diámetros AB y DE del círculo de Mohr están a 90° el uno del otro, se tiene que las caras de los elementos correspondientes están a 45° la una de la otra (figura 7.19*a*).

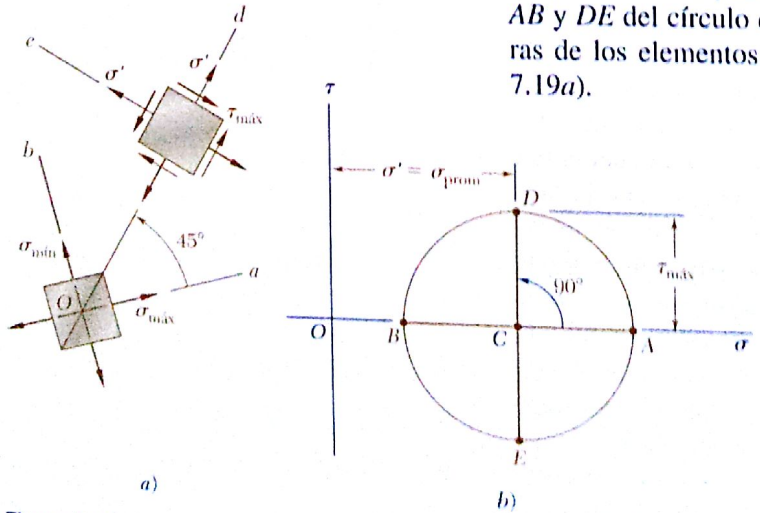


Figura 7.19

La construcción del círculo de Mohr para esfuerzo plano se simplifica mucho si se considera separadamente cada cara del elemento usado para definir las componentes del esfuerzo. De las figuras 7.17 y 7.18 observe que cuando el esfuerzo cortante ejercido *sobre una cara dada* tiende a hacer girar el elemento *en el sentido de las agujas del reloj*, el punto correspondiente a esa cara está colocado *por encima* del eje σ en el círculo de Mohr. Cuando el esfuerzo cortante en una cara tiende a hacer girar el elemento en el sentido contrario a las agujas del reloj, el punto correspondiente a esa cara está localizado *debajo* del eje σ (figura 7.20).[†] En cuanto a los esfuerzos normales, se usa la convención usual, es decir, un esfuerzo de tensión se considera positivo y se grafica a la derecha, mientras una compresión es negativa y se grafica hacia la izquierda.

a) En el sentido de las agujas del reloj ⟶ Arriba

b) En el sentido contrario a las agujas del reloj ⟶ Abajo

Figura 7.20

[†] La siguiente frase en inglés ayudará a memorizar esta convención: "In the kitchen, the *clock* is above, and the *counter* is below."

EJEMPLO 7.02

Para el estado de esfuerzo plano considerado en el ejemplo 7.01, *a*) trace el círculo de Mohr, *b*) determine los esfuerzos principales, *c*) halle el esfuerzo cortante máximo y el correspondiente esfuerzo normal.

a) Construcción del círculo de Mohr. Se advierte en la figura 7.21*a* que el esfuerzo normal ejercido sobre la cara orientada hacia el eje x es de tensión (positiva) y que el esfuerzo cortante ejercido sobre esa cara tiende a rotar el elemento en el sentido contrario a las agujas del reloj. El punto X del círculo de Mohr, por tanto, se dibujará a la derecha del eje vertical y debajo del eje horizontal (figura 7.21*b*). Una inspección similar de los esfuerzos normal y cortante ejercidos sobre la cara superior del elemento muestra que el punto Y debe dibujarse a la izquierda del eje vertical y encima del eje horizontal. Dibujando la línea XY, se obtiene el centro C del círculo de Mohr; su abscisa es:

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

Como los lados del triángulo sombreado son

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \qquad \text{y} \qquad FX = 40 \text{ MPa}$$

el radio del círculo es

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

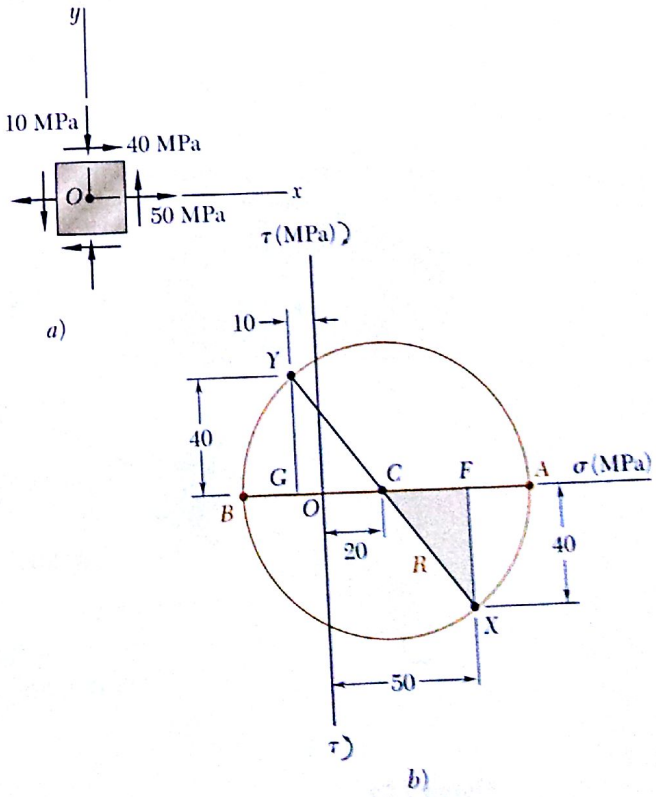


Figura 7.21

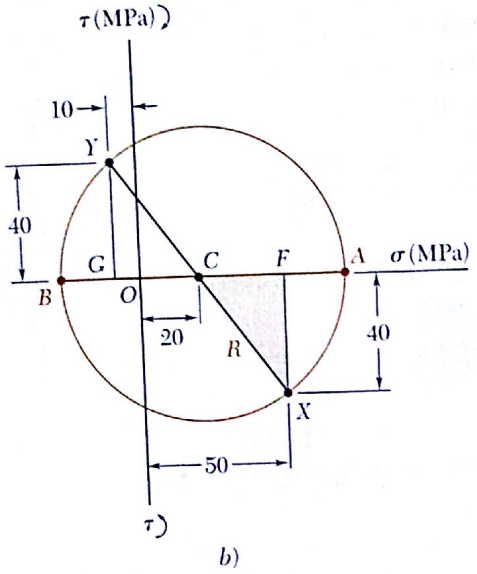


Figura 7.21*b*) (repetida)

b) Esfuerzo y planos principales. Los esfuerzos principales son

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

Recordando que el ángulo ACX representa $2\theta_p$ (figura 7.21*b*), se escribe:

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$2\theta_p = 53.1° \qquad \theta_p = 26.6°$$

Como la rotación que lleva CX a CA, en la figura 7.22*b*, es en sentido contrario a las agujas del reloj, la rotación que lleva a Ox hasta el eje Oa, que corresponde a $\sigma_{\text{máx}}$ en la figura 7.22*a*, es también en sentido contrario a las agujas del reloj.

c) Esfuerzo cortante máximo. Ya que una rotación adicional de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj CA a CD en la figura 7.22*b*, una rotación adicional de 45° en sentido contrario a las agujas del reloj llevará el eje Oa a Od que corresponde al esfuerzo cortante máximo en la figura 7.22*a*. Se observa en la figura 7.22*b* que $\tau_{\text{máx}} = R = 50$ MPa y que el esfuerzo normal correspondiente es $\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = 20$ MPa. Como el punto D está por encima del eje σ en la figura 7.22*b*, los esfuerzos cortantes ejercidos sobre las caras perpendiculares a Od en la figura 7.22*a* deben dirigirse de manera que tiendan a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj.

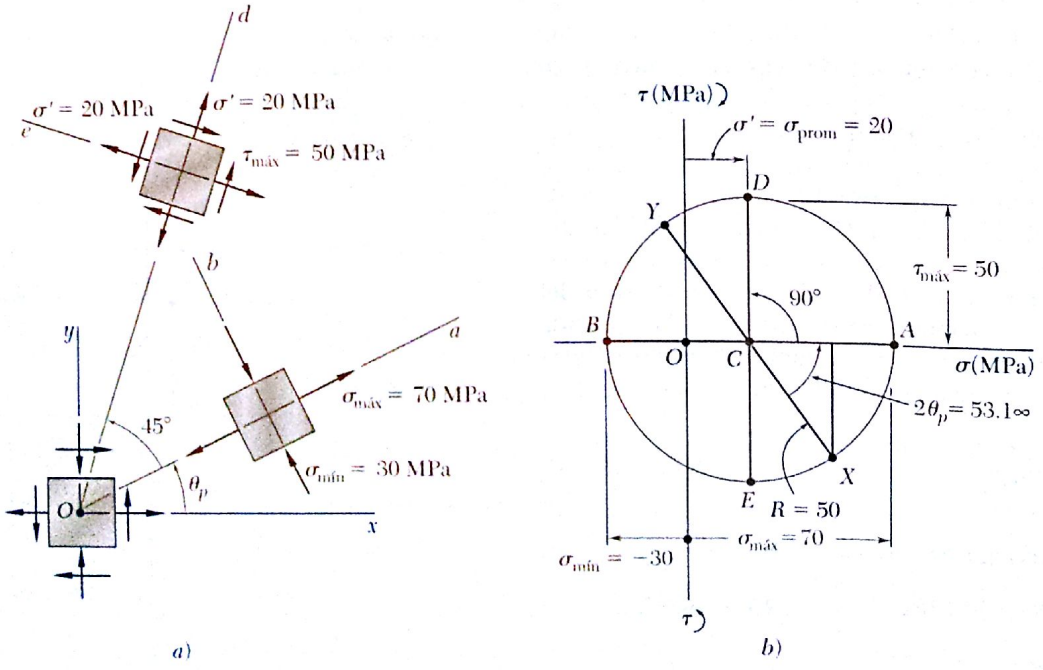


Figura 7.22

El círculo de Mohr ofrece un modo conveniente de verificar los resultados obtenidos antes para esfuerzos bajo carga axial céntrica (véase sección 1.12) y bajo carga torsional (sección 3.4). En el primer caso (figura 7.23*a*), se tiene $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$. Los puntos correspondientes X y Y definen un círculo de radio $R = P/2A$ que pasa por el origen de coordenadas

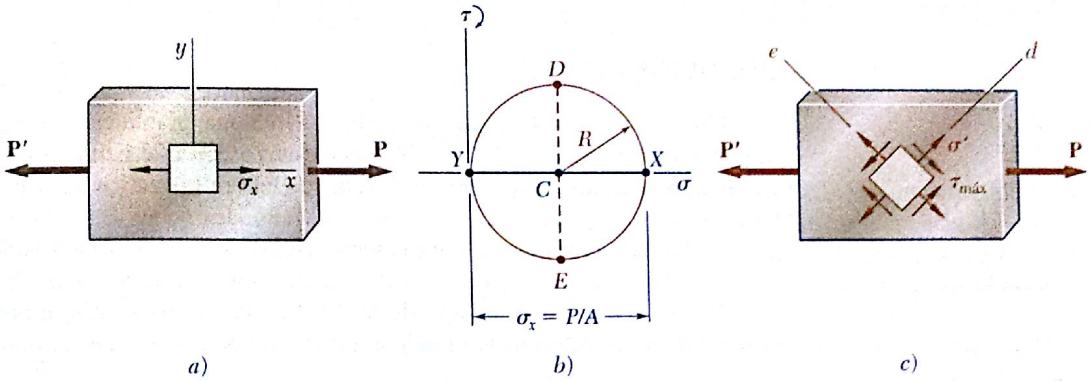


Figura 7.23 Círculo de Mohr para carga axial céntrica.

(figura 7.23*b*). Los puntos D y E dan la orientación de los planos de esfuerzo cortante máximo (figura 7.23*c*), así como los valores de $\tau_{máx}$ y el correspondiente esfuerzo normal σ':

$$\tau_{máx} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \tag{7.18}$$

En el caso de torsión (figura 7.24*a*), se tiene $\sigma_x = \sigma_y = 0$ y $\tau_{xy} = \tau_{máx} = Tc/J$. Los puntos X y Y están localizados en el eje τ y el

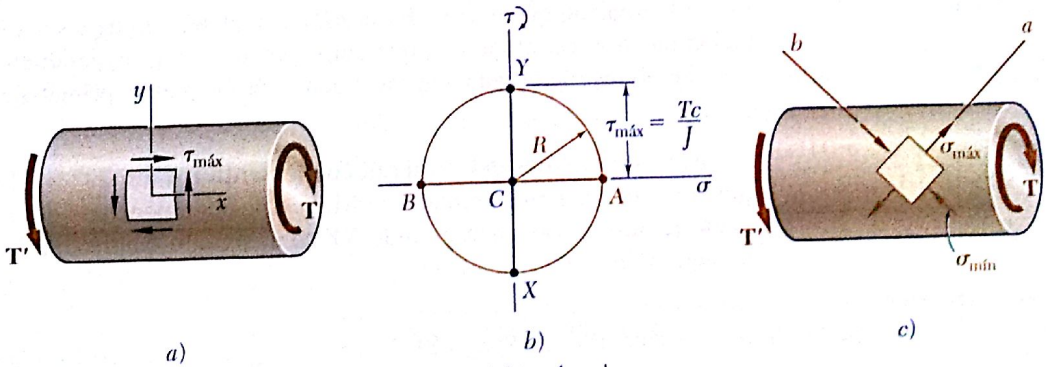
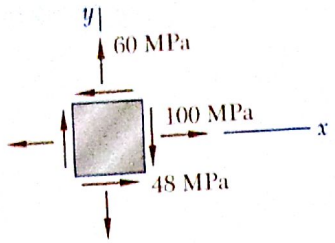


Figura 7.24 Círculo de Mohr para carga axial torsional.

círculo de Mohr tiene un radio $R = Tc/J$ centrado en el origen (figura 7.24*b*). Los puntos A y B definen los planos principales (figura 7.24*c*) y los esfuerzos principales:

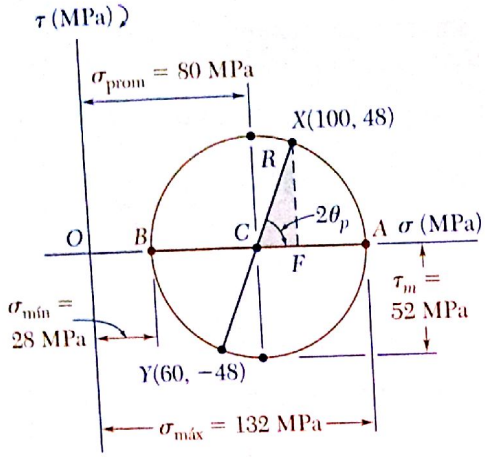
$$\sigma_{máx,\,mín} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \tag{7.19}$$

PROBLEMA MODELO 7.2



Para el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine: *a*) los esfuerzos principales y los planos principales, *b*) las componentes del esfuerzo ejercidas sobre el elemento obtenido rotando el elemento dado 30° en sentido contrario a las agujas del reloj.

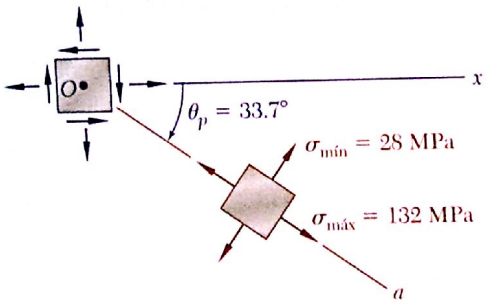
SOLUCIÓN



Construcción del círculo de Mohr. Note que en una cara perpendicular al eje x, el esfuerzo normal es de tensión y el esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj. Así, se elabora la gráfica de X en un punto 100 unidades a la derecha del eje vertical y 48 unidades sobre el eje horizontal. En forma similar, se examinan las componentes del esfuerzo en la cara superior y se elabora la gráfica del punto $Y(60, -48)$. Uniendo los puntos X y Y mediante una recta, se define el centro C del círculo de Mohr. La abscisa de C, que representa σ_{prom}, y el radio R del círculo pueden medirse directamente o calcularse como sigue:

$$\sigma_{prom} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(100 + 60) = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$



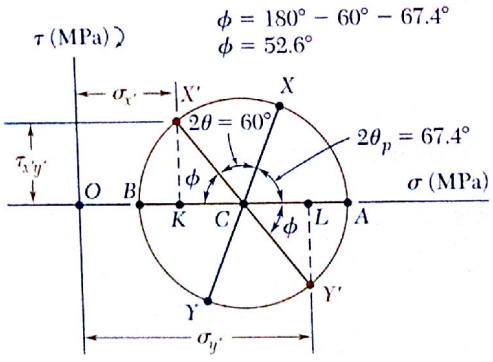
***a*) Planos principales y esfuerzos principales.** Se rota el diámetro XY en el sentido de las agujas del reloj $2\theta_p$ hasta que coincida con el diámetro AB. Se tiene

$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \qquad 2\theta_p = 67.4° \text{ ↓} \quad \theta_p = 33.7° \text{ ↓} \blacktriangleleft$$

Los esfuerzos principales están representados por las abscisas de los puntos A y B:

$$\sigma_{máx} = OA = OC + CA = 80 + 52 \qquad \sigma_{máx} = +132 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{mín} = OB = OC - BC = 80 - 52 \qquad \sigma_{mín} = +28 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$



Como la rotación que trae XY hasta AB es en el sentido de las agujas del reloj, la rotación que trae Ox al eje Oa, que corresponde a $\sigma_{máx}$, es también en el mismo sentido. Se obtiene la orientación mostrada para los planos principales.

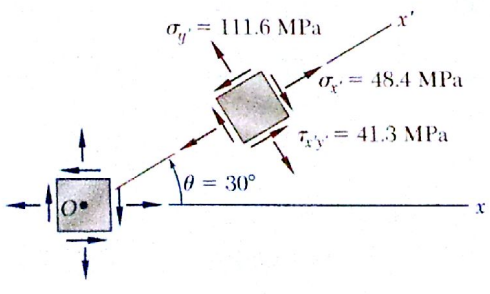
***b*) Componentes del esfuerzo en elemento rotado 30° ↰.** Los puntos X' y Y' que corresponden en el círculo de Mohr a las componentes del esfuerzo en el elemento rotado, se obtienen girando XY en el sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo $2\theta = 60°$. Se tiene:

$$\phi = 180° - 60° - 67.4° \qquad \phi = 52.6° \blacktriangleleft$$

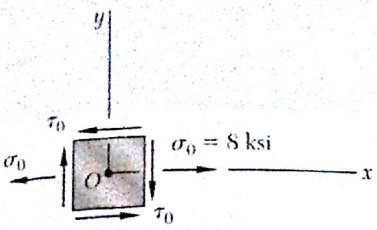
$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52\cos 52.6° \qquad \sigma_{x'} = +48.4 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52\cos 52.6° \qquad \sigma_{y'} = +111.6 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \operatorname{sen} 52.6° \qquad \tau_{x'y'} = 41.3 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

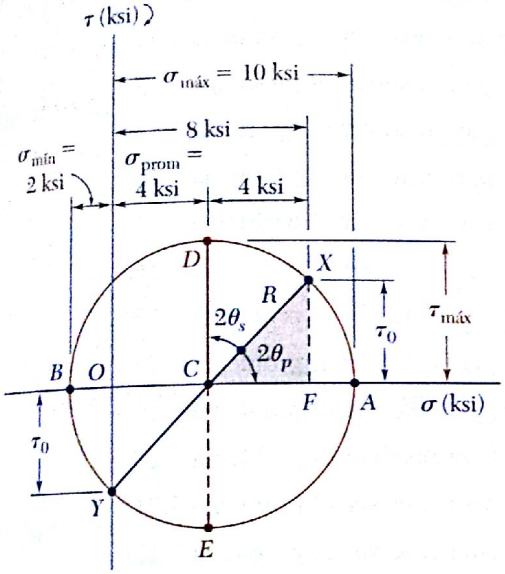


Como X' se localiza por encima del eje horizontal, el esfuerzo cortante en la cara normal a Ox' tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj.



PROBLEMA MODELO 7.3

Un estado de esfuerzo plano consiste en un esfuerzo de tensión $\sigma_0 = 8$ ksi ejercido sobre las superficies verticales y en esfuerzo cortante desconocidos. Determine: *a*) la magnitud del esfuerzo cortante τ_0 para el cual el mayor esfuerzo normal es 10 ksi, *b*) el correspondiente esfuerzo cortante máximo.



SOLUCIÓN

Construcción del círculo de Mohr. Se supondrá que los esfuerzos cortantes actúan en los sentidos mostrados. En consecuencia, el esfuerzo cortante τ_0 en una cara normal al eje x tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj y se traza el punto X de coordenas 8 ksi y τ_0 por encima del eje horizontal. Considerando una cara horizontal del elemento, se observa que $\sigma_y = 0$ y que τ_0 tiende a rotar el elemento en sentido contrario al de las agujas del reloj; por tanto, se traza el punto Y a una distancia τ_0 por debajo de O.

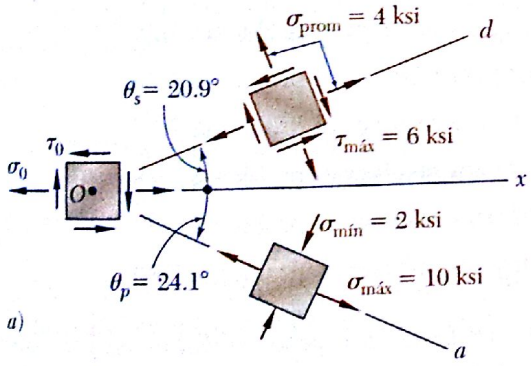
Se observa que la abscisa del centro C del círculo de Mohr es

$$\sigma_{prom} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(8 + 0) = 4 \text{ ksi}$$

El radio R del círculo se determina observando que el máximo esfuerzo normal, $\sigma_{máx} = 10$ ksi está representado por la abscisa del punto A y escribiendo

$$\sigma_{máx} = \sigma_{prom} + R$$

$$10 \text{ ksi} = 4 \text{ ksi} + R \qquad R = 6 \text{ ksi}$$



***a*) Esfuerzo cortante τ_0.** Considerando el triángulo rectángulo CFX, se halla

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{4 \text{ ksi}}{6 \text{ ksi}} \qquad 2\theta_p = 48.2° \downarrow \qquad \theta_p = 24.1° \downarrow$$

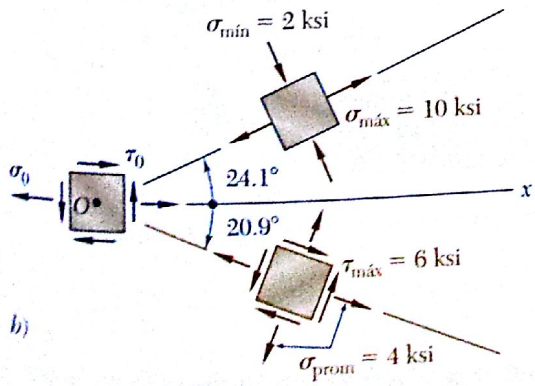
$$\tau_0 = FX = R \operatorname{sen} 2\theta_p = (6 \text{ ksi}) \operatorname{sen} 48.2° \qquad \tau_0 = 4.47 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b*) Esfuerzo cortante máximo.** Las coordenadas del punto D del círculo de Mohr representan el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal correspondiente.

$$\tau_{máx} = R = 6 \text{ ksi} \qquad \tau_{máx} = 6 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

$$2\theta_s = 90° - 2\theta_p = 90° - 48.2° = 41.8° \uparrow \qquad \theta_x = 20.9° \uparrow$$

El esfuerzo cortante máximo se ejerce sobre un elemento orientado como se muestra en la figura *a*). (También se muestra el elemento sobre el cual se ejercen los esfuerzos principales.)



Nota: Si se invirtiera la hipótesis original sobre el sentido de τ_0 se obtendría el mismo círculo y las mismas respuestas, pero la orientación del elemento sería como la que ilustra la figura *b*).

PROBLEMAS

7.31 Utilice el círculo de Mohr para resolver los problemas 7.5 y 7.9.

7.32 Utilice el círculo de Mohr para resolver los problemas 7.6 y 7.10.

7.33 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.11.

7.34 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.12.

7.35 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.13.

7.36 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.14.

7.37 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.15.

7.38 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.16.

7.39 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.17.

7.40 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.18.

7.41 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.19.

7.42 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.20.

7.43 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.21.

7.44 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.22.

7.45 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.23.

7.46 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.24.

7.47 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.25.

7.48 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.26.

7.49 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.27.

7.50 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.28.

7.51 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.29.

7.52 Utilice el círculo de Mohr para resolver el problema 7.30.

7.53 Si se sabe que la ménsula *AB* tiene un espesor uniforme de $\frac{5}{8}$ in., determine *a*) los planos principales y los esfuerzos principales en el punto *H*, *b*) el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

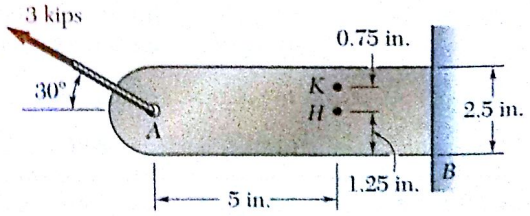


Figura *P7.53*

7.54 Retome el problema 7.53, considerando el punto *K*.

7.55 a 7.58 Determine los planos principales y los esfuerzos principales para el estado de esfuerzo plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzo que se muestran en la figura.

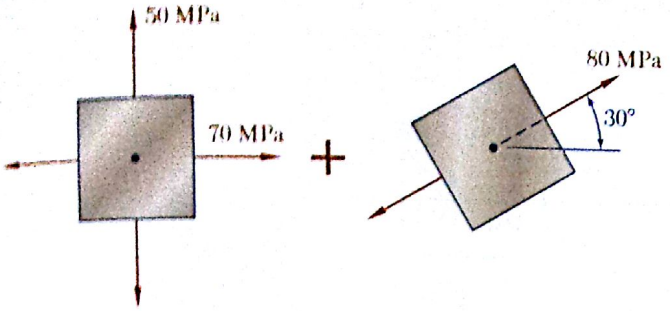


Figura P7.55

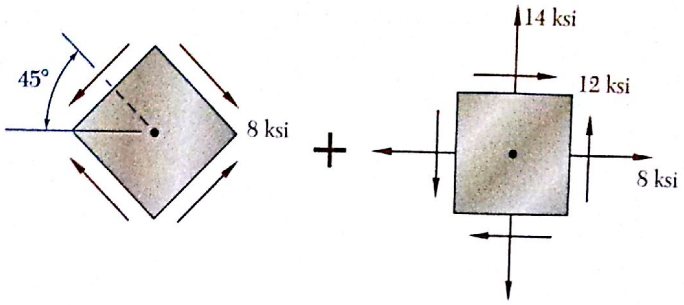


Figura P7.56

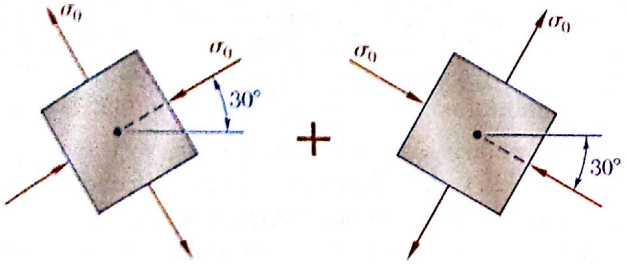


Figura P7.57

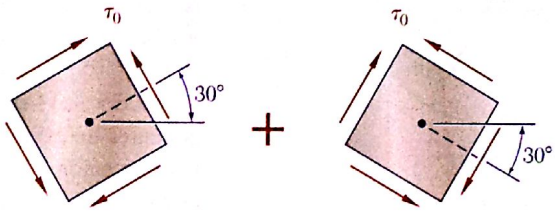


Figura P7.58

7.59 Para el elemento que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo de tensión máximo es menor o igual que 60 MPa.

7.60 Para el elemento que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo cortante máximo en el plano es menor o igual que 150 MPa.

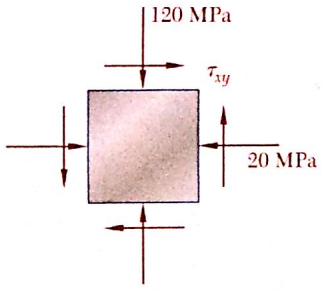


Figura *P7.59* y *P7.60*

7.61 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los cuales el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ es menor o igual que 20 ksi.

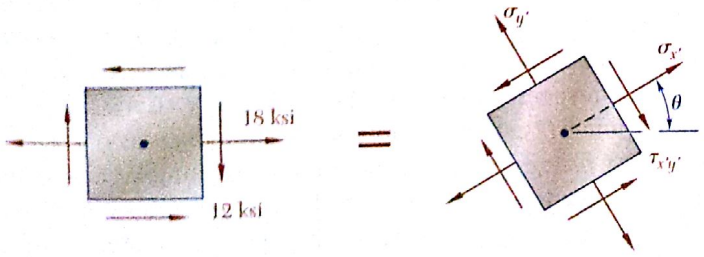


Figura P7.61 y P7.62

7.62 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los que el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$ es menor o igual que 10 ksi.

7.63 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, se sabe que los esfuerzos normal y cortante están dirigidos como se indica y que $\sigma_x = 14$ ksi, $\sigma_y = 9$ ksi y $\sigma_{mín} = 5$ ksi. Determine *a*) la orientación de los planos principales, *b*) el esfuerzo principal $\sigma_{máx}$, *c*) el esfuerzo cortante máximo en el plano.

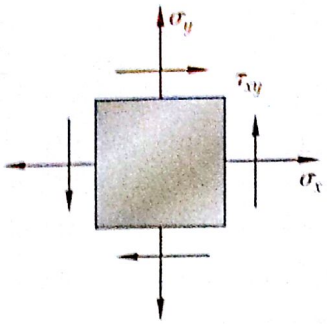


Figura P7.63

7.64 El círculo de Mohr que se muestra en la figura corresponde al estado de esfuerzo dado en la figura 7.5*a*) y *b*). Observe que $\sigma_{x'} = OC + (CX') \cos(2\theta_p - 2\theta)$ y que $\tau_{x'y'} = (CX') \operatorname{sen}(2\theta_p - 2\theta)$, deduzca las expresiones para $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ dadas en las ecuaciones (7.5) y (7.6), respectivamente. [*Sugerencia:* Utilice sen $(A + B) =$ sen $A \cos B + \cos A$ sen B y $\cos(A + B) = \cos A \cos B -$ sen A sen B.]

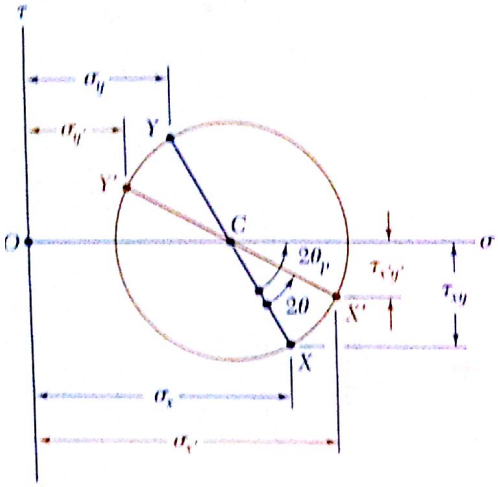


Figura P7.64

7.65 *a*) Demuestre que la expresión $\sigma_{x'}\sigma_{y'} - \tau^2_{x'y'}$, donde $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ son componentes de esfuerzo a lo largo de los ejes rectangulares x' y y', es independiente de la orientación de dichos ejes. Asimismo, demuestre que la expresión dada representa el cuadrado de la tangente trazada desde el origen de las coordenadas al círculo de Mohr. *b*) Con la propiedad de invariancia establecida en el inciso *a*), exprese el esfuerzo cortante τ_{xy} en términos de σ_x, σ_y, y los esfuerzos principales $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$.

7.5 ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS

En las secciones precedentes se ha supuesto un estado de esfuerzo plano con $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, y considerando sólo transformaciones de esfuerzo asociadas con una rotación alrededor del eje z. Ahora se considerará el estado de esfuerzo general representado en la figura 7.1*a* y la transformación de esfuerzos asociada con la rotación de ejes mostrada en la figura 7.1*b*. Sin embargo, el análisis se limitará a la determinación del *esfuerzo normal* σ_n en un plano de orientación arbitraria.

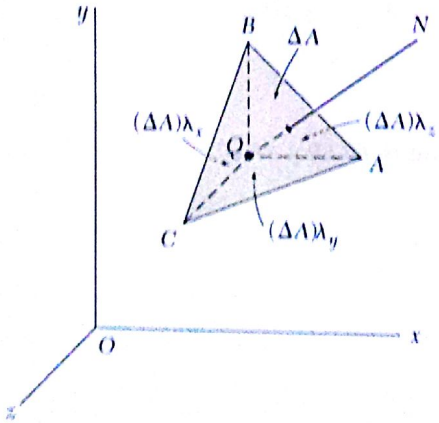


Figura 7.25

Considere el tetraedro mostrado en la figura 7.25. Tres de sus caras son paralelas a los planos coordenados, y la cuarta cara ABC es perpendicular a la línea QN. Si ΔA es el área de la cara ABC, y λ_x, λ_y, λ_z los cosenos directores de QN, se encuentra que las áreas de las caras perpendiculares a los ejes x, y y z son, respectivamente, $(\Delta A)\lambda_x$, $(\Delta A)\lambda_y$ y $(\Delta A)\lambda_z$. Si el estado de esfuerzo en el punto Q está definido por las componentes σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} y τ_{zx}, entonces las *fuerzas* ejercidas sobre las caras paralelas a los planos coordenados pueden obtenerse multiplicando las componentes apropiadas del esfuerzo por el área de cada cara (figura 7.26). Por otra parte, las fuerzas ejercidas sobre la cara ABC constan de una fuerza normal de magnitud $\sigma_n \Delta A$ dirigida a lo largo de QN, y de una fuerza cortante de magnitud $\tau \Delta A$ perpendicular a QN, pero de dirección desconocida. Note que como QBC, QCA y QAB, respectivamente, enfrentan las direcciones negativas de los ejes x, y y z, las fuerzas ejercidas sobre ellas deben mostrarse con sentidos negativos.

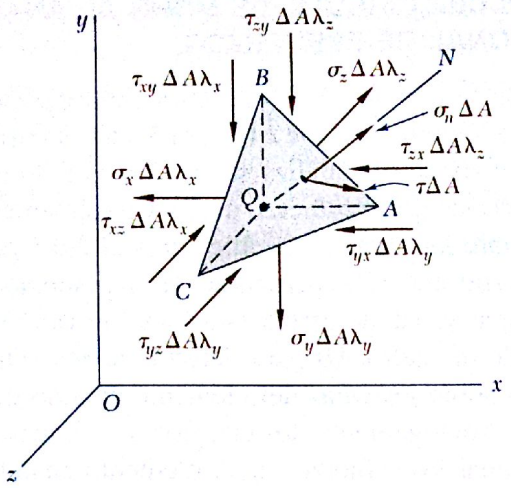


Figura 7.26

Ahora se expresa que la suma de las componentes de todas las fuerzas que actúan en el tetraedro, a lo largo de QN, es cero. Observando que las componentes de una fuerza paralela al eje x a lo largo de QN se obtiene multiplicando su magnitud por el coseno director λ_x, y que las componentes de las fuerzas paralelas a los ejes y y z se obtienen en forma similar, se escribe

$$\begin{aligned}\Sigma F_n = 0: \quad & \sigma_n\,\Delta A - (\sigma_x\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_x - (\tau_{xy}\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_y - (\tau_{xz}\,\Delta A\,\lambda_x)\lambda_z \\ & - (\tau_{yx}\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_x - (\sigma_y\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_y - (\tau_{yz}\,\Delta A\,\lambda_y)\lambda_z \\ & - (\tau_{zx}\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_x - (\tau_{zy}\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_y - (\sigma_z\,\Delta A\,\lambda_z)\lambda_z = 0\end{aligned}$$

Dividiendo entre ΔA y despejando a σ_n,

$$\sigma_n = \sigma_x\lambda_x^2 + \sigma_y\lambda_y^2 + \sigma_z\lambda_z^2 + 2\tau_{xy}\lambda_x\lambda_y + 2\tau_{yz}\lambda_y\lambda_z + 2\tau_{zx}\lambda_z\lambda_x \qquad (7.20)$$

Se observa que la expresión obtenida para σ_n es una *forma cuadrática* en λ_x, λ_y y λ_z. Se sigue que pueden escogerse los ejes coordenados de tal manera que el miembro derecho de la ecuación (7.20) se reduzca a los tres términos que contienen los cuadrados de los cosenos directores.[†] Llamando estos ejes a, b y c, los correspondientes esfuerzos normales por σ_a, σ_b y σ_c y los cosenos directores de QN, con respecto a estos ejes, por λ_a, λ_b y λ_c, se escribe

$$\sigma_n = \sigma_a\lambda_a^2 + \sigma_b\lambda_b^2 + \sigma_c\lambda_c^2 \qquad (7.21)$$

Los ejes coordenados a, b, c son los *ejes principales de esfuerzo*. Como su orientación depende del estado de esfuerzo en Q y, en consecuencia, de la posición de Q, se han representado en la figura 7.27 unidos a Q. Los planos coordenados correspondientes son los *planos principales de esfuerzo* y los correspondientes esfuerzos normales σ_a, σ_b y σ_c son los *esfuerzos principales* en Q.[‡]

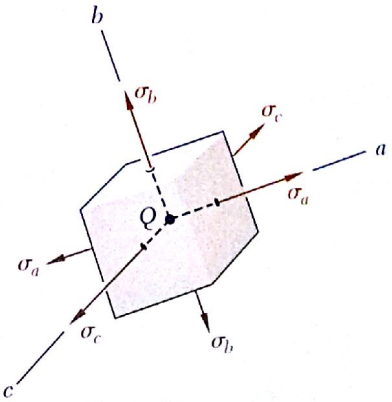


Figura 7.27

[†] En la sección 9.16 de *Vector Mechanics for Engineers* de Beer y Johnston, 7a. edición, McGraw-Hill, Book Company, 2004, se encuentra una forma cuadrática similar para representar el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje cualquiera. En la sección 9.17 se muestra que esta forma está asociada con una superficie cuadrática y que reduciendo la forma cuadrática a términos que contienen sólo los cuadrados de los cosenos directores se determinan los ejes principales de esa superficie.

[‡] Para un análisis de la determinación de los planos principales de esfuerzo y de los esfuerzos principales, véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill Book Company, 1970, sec. 77.

7.6 APLICACIÓN DEL CÍRCULO DE MOHR AL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE ESFUERZOS

Si el elemento mostrado en la figura 7.27 gira con respecto a uno de los ejes principales en Q, por ejemplo el eje c (figura 7.28), la correspondiente transformación de esfuerzos puede analizarse mediante el círculo de Mohr, como si fuera una transformación de esfuerzo plano. Ciertamente, los esfuerzos cortantes ejercidos sobre las caras perpendiculares al eje c permanecen iguales a cero y el esfuerzo normal σ_c es perpendicular al plano ab en el cual la transformación tiene lugar y, así, no afecta esta transformación. Puede, por tanto, usarse el círculo de diámetro AB para determinar los esfuerzos normales y cortantes ejercidos sobre las caras del elemento cuando gira con respecto al eje c (figura 7.29). Análogamente, los círculos de diámetro BC y CA pueden usarse para determinar los esfuerzos en el elemento cuando gira con respecto a los ejes a y b. Mientras este análisis se limita a rotaciones con respecto

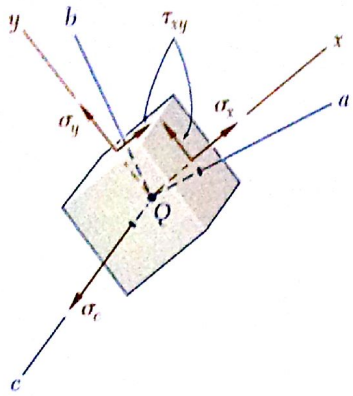


Figura 7.28

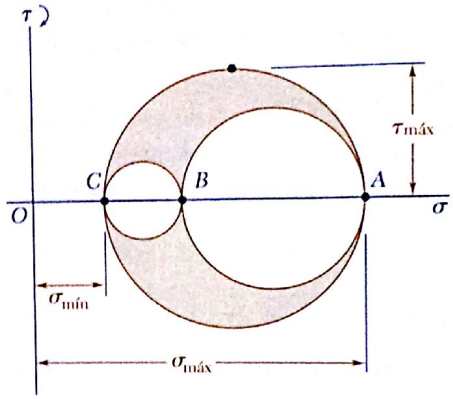


Figura 7.29

a los ejes principales, podría demostrarse que cualquier otra transformación de ejes conducirá a esfuerzos representados en la figura 7.29 por un punto dentro del área sombreada. Por consiguiente, el radio del mayor de los círculos da el esfuerzo cortante máximo en el punto Q. Notando que su diámetro es igual a la diferencia entre $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$, se escribe

$$\tau_{máx} = \tfrac{1}{2}|\sigma_{máx} - \sigma_{mín}| \tag{7.22}$$

en donde $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$ representan los valores *algebraicos* de los esfuerzos máximo y mínimo en el punto Q.

Regresemos ahora al caso particular de *esfuerzo plano*, que se estudió en las secciones 7.2 a 7.4. Recuerde que si los ejes x y y se eligen en el plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Esto significa que el eje z, es decir, el eje perpendicular al plano de esfuerzo, es uno de los tres ejes principales de esfuerzo. En un diagrama de círculo de Mohr, este eje corresponde al origen O, en donde $\sigma = \tau = 0$. Recuerde también que los otros dos ejes principales corresponden a los puntos A y B donde el círculo de Mohr, para

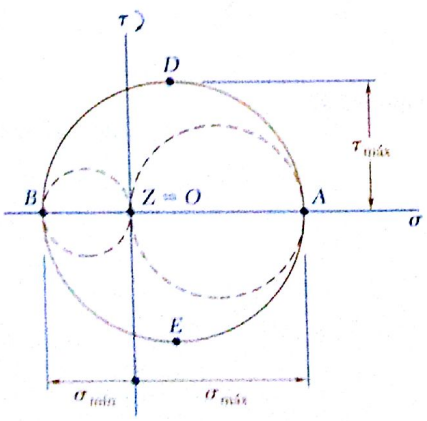


Figura 7.30

el plano xy, interseca el eje σ. Si A y B están en lados opuestos del origen O (figura 7.30), los esfuerzos principales correspondientes representan al esfuerzo máximo y mínimo normal en el punto Q, y el esfuerzo cortante máximo es igual al máximo cortante en el plano. Como se observó en la sección 7.3, los planos de esfuerzo cortante máximo corresponden a los puntos D y E del círculo de Mohr y están a 45° de los planos principales correspondientes a los puntos A y B. Son, por tanto, los planos sombreados de la figura 7.31a y b.

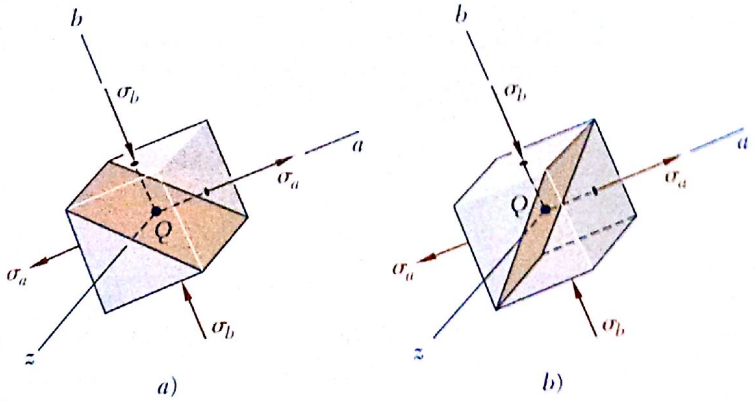


Figura 7.31

Si, por otra parte, A y B están en el mismo lado de O, esto es, si σ_a y σ_b tienen el mismo signo, entonces el círculo que define $\sigma_{máx}$, $\sigma_{mín}$ y $\tau_{máx}$ *no* es el círculo correspondiente a una transformación de esfuerzo dentro del plano xy. Si $\sigma_a > \sigma_b > 0$, como se supone en la figura 7.32, se tiene $\sigma_{máx} = \sigma_a$, $\sigma_{mín} = 0$ y $\tau_{máx}$ es igual al radio del círculo definido por los puntos O y A, esto es $\tau_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_{máx}$. También se advierte que las normales Qd' y Qe', a los planos de esfuerzo cortante máximo, se obtienen rotando el eje Qa a un ángulo de 45° dentro del plano za. Así, los planos de esfuerzo cortante máximo son los planos diagonales sombreados en la figura 7.33a y b.

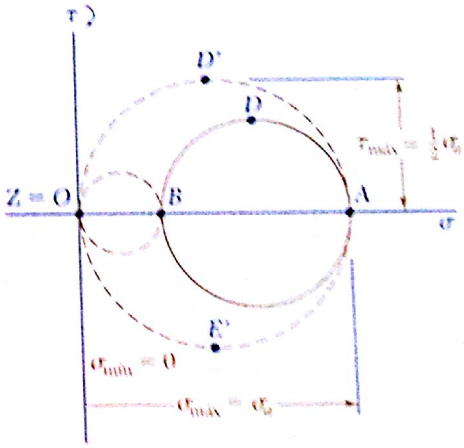


Figura 7.32

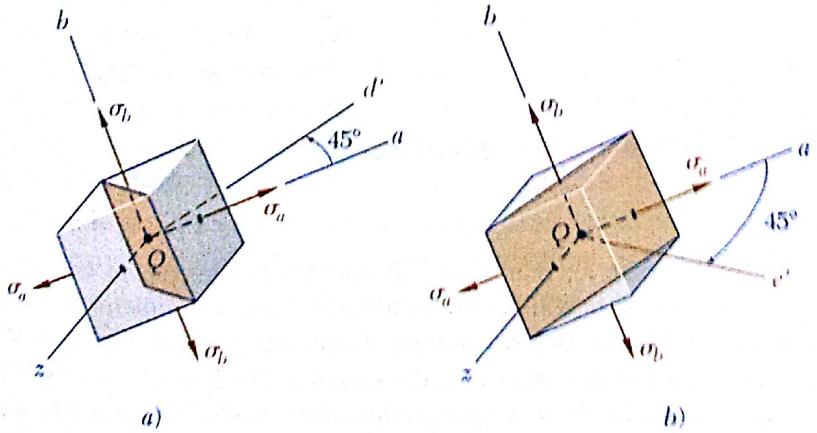


Figura 7.33

EJEMPLO 7.03

Para el estado de esfuerzo plano que ilustra la figura 7.34, determine: *a*) los tres planos y esfuerzos principales, *b*) el esfuerzo cortante máximo.

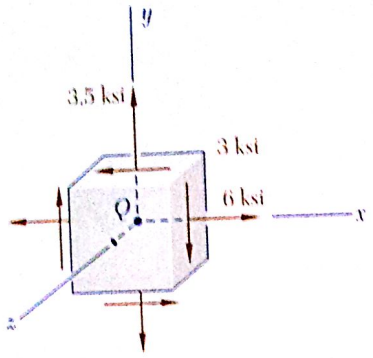


Figura 7.34

a) Esfuerzos y planos principales. Se construye el círculo de Mohr para las transformaciones de esfuerzo en el plano *xy* (figura 7.35). El punto *X* está representando 6 unidades a la derecha del eje τ y 3 unidades por encima del eje σ, ya que el correspondiente esfuerzo cortante tiende a rotar el elemento en el sentido de las agujas del reloj. El punto *Y* está 3.5 unidades a la derecha del eje τ y 3 unidades por debajo del eje σ. Trazando la línea *XY*, se obtiene el centro *C* del círculo de Mohr para el plano *xy*; su abscisa es:

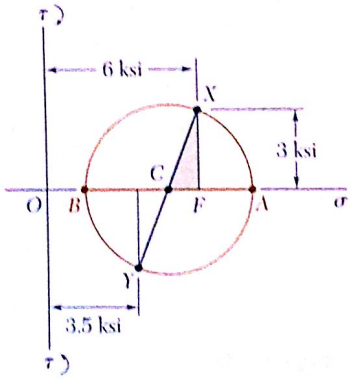


Figura 7.35

$$\sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6 + 3.5}{2} = 4.75 \text{ ksi}$$

Como los lados del triángulo *CFX* son $CF = 6 - 4.75 = 1.25$ ksi y $FX = 3$ ksi, el radio del círculo es

$$R = CX = \sqrt{(1.25)^2 + (3)^2} = 3.25 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos principales en el plano de esfuerzos son:

$$\sigma_a = OA = OC + CA = 4.75 + 3.25 = 8.00 \text{ ksi}$$
$$\sigma_b = OB = OC - BC = 4.75 - 3.25 = 1.50 \text{ ksi}$$

Puesto que las caras del elemento que son perpendiculares al eje *z* están libres de esfuerzo, éstas definen uno de los planos principales y el esfuerzo principal correspondiente es $\sigma_z = 0$. Los otros dos planos principales están definidos por los puntos *A* y *B* en el círculo de Mohr. El ángulo θ_p que el elemento debe rotar alrededor del eje *z* para que sus caras coincidan con estos planos (figura 7.36) es la mitad del ángulo *ACX*. Se tiene

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{3}{1.25}$$
$$2\theta_p = 67.4° \circlearrowleft \qquad \theta_p = 33.7° \circlearrowleft$$

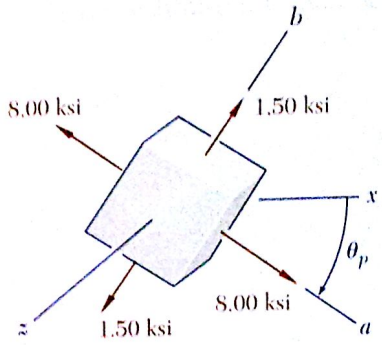


Figura 7.36

b) Esfuerzo cortante máximo. Ahora se dibujan los círculos de diámetro *OB* y *OA*, que corresponden respectivamente a rotaciones del elemento con respecto a los ejes *a* y *b* (figura 7.37). Note que el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro *OA*. Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_a = \tfrac{1}{2}(8.00 \text{ ksi}) = 4.00 \text{ ksi}$$

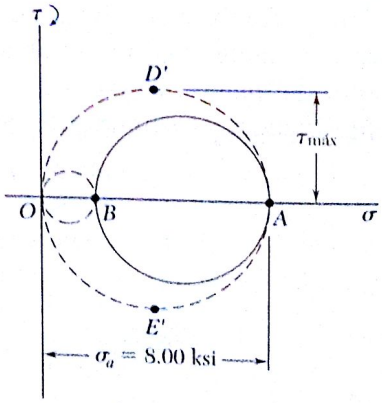


Figura 7.37

Como los puntos *D'* y *E'* que definen los planos de esfuerzo cortante máximo, están en los extremos del diámetro vertical del círculo que corresponde a una rotación con respecto al eje *b*, las caras del elemento de la figura 7.36 pueden superponerse a los planos de esfuerzo cortante máximo mediante una rotación de 45° con respecto al eje *b*.

*7.7 CRITERIOS DE FLUENCIA PARA MATERIALES DÚCTILES BAJO ESFUERZO PLANO

Los elementos estructurales y las componentes de máquinas elaborados de un material dúctil se diseñan de manera que el material no fluya bajo las condiciones esperadas de carga. Cuando el elemento o componente está sometido a esfuerzo uniaxial (figura 7.38), el valor del esfuerzo normal σ_x que hará fluir el material puede obtenerse fácilmente de una prueba de tensión

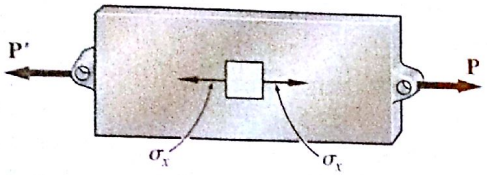
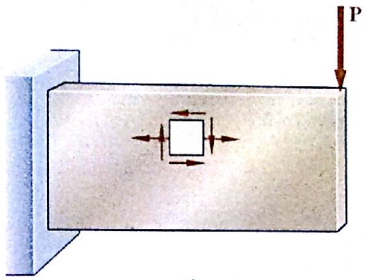


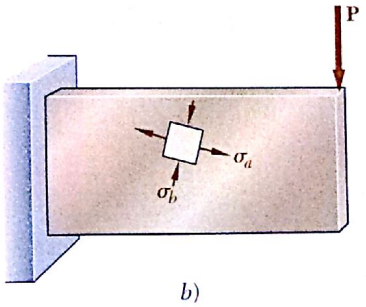
Figura 7.38

llevada a cabo en una probeta del mismo material, ya que la probeta y el elemento estructural o componente de máquina están en el mismo estado de esfuerzo. En consecuencia, sin importar el mecanismo que hace fluir el material, puede afirmarse que el elemento o componente está seguro siempre que $\sigma_x < \sigma_Y$, en donde σ_Y es la resistencia a la fluencia del elemento de prueba.

Por otra parte, cuando un elemento estructural o componente de máquina está en un estado de esfuerzo plano (figura 7.39*a*), es conveniente usar uno de los métodos desarrollados con anterioridad para determinar los esfuerzos principales σ_a y σ_b en cualquier punto dado (figura 7.39*b*). El material puede considerarse entonces en un estado de esfuerzo biaxial en ese punto. Como este estado es diferente del estado uniaxial típico de un elemento sometido a una prueba de tensión, es obvio que no es posible predecir, directamente de tal prueba, si el elemento estructural o el elemento de máquina bajo investigación fallará o no. Primero debe establecerse algún criterio acerca del mecanismo de falla del material que permita comparar los efectos de ambos estados de esfuerzo en el material. El propósito de esta sección es presentar los dos criterios de fluencia usados con mayor frecuencia para materiales dúctiles.



a)



b)

Figura 7.39

Criterio del esfuerzo cortante máximo. Este criterio se basa en la observación que sitúa la fluencia de materiales dúctiles como resultado del deslizamiento del material, a lo largo de superficies oblicuas, debido a esfuerzos cortantes (véase sección 2.3). De acuerdo con este criterio, un componente estructural es seguro siempre que el valor máximo $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante, en esa componente, permanezca por debajo del valor correspondiente del esfuerzo cortante que, en una prueba de tensión de una probeta del mismo material la hace fluir.

Recordando de la sección 1.11 que el máximo valor del esfuerzo cortante bajo una carga axial céntrica es igual a la mitad del valor del esfuerzo axial correspondiente, se concluye que el esfuerzo cortante máximo en una prueba de tensión es $\frac{1}{2}\sigma_Y$ cuando la probeta empieza a fluir. Por otra parte, se estudió en la sección 7.6 que, para el esfuerzo plano, el máximo valor $\tau_{\text{máx}}$ del esfuerzo cortante es $\frac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}}|$ si los esfuerzos principales son ambos positivos o ambos negativos y es $\frac{1}{2}|\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}|$ si el máximo esfuerzo es posi-

tivo o el mínimo negativo. Por consiguiente, si los esfuerzos principales σ_a y σ_b tienen el mismo signo, el criterio del esfuerzo cortante máximo da:

$$|\sigma_a| < \sigma_Y \qquad |\sigma_b| < \sigma_Y \tag{7.23}$$

Si los esfuerzos principales σ_a y σ_b tienen signos opuestos, el criterio del esfuerzo cortante máximo produce

$$|\sigma_a - \sigma_b| < \sigma_Y \tag{7.24}$$

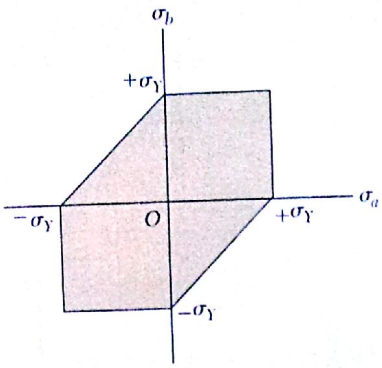


Figura 7.40

En la figura 7.40 se han representado gráficamente las relaciones obtenidas. Cualquier estado de esfuerzo se representará en esa figura por un punto de coordenadas σ_a y σ_b, en donde σ_a y σ_b son los esfuerzos principales. Si el punto cae dentro del área mostrada en la figura, el componente estructural es seguro. Si cae fuera de esta área, el componente fallará por cedencia del material. El hexágono asociado con la iniciación de la cedencia en el material se conoce como *hexágono de Tresca* en honor al ingeniero francés Henri Edouard Tresca (1814-1885).

Criterio de la máxima energía de distorsión. Se basa en el cálculo de la energía de distorsión en un material dado, es decir, de la energía asociada con cambios en la forma del material (distinto de la energía asociada con el cambio de volumen en el mismo material). De acuerdo con este criterio, también conocido como el *criterio de von Mises*, en honor del matemático germano-estadounidense Richard von Mises (1883-1953), un componente estructural dado es seguro siempre que el valor máximo de la energía de distorsión por unidad de volumen en ese material permanezca más pequeño que la energía de distorsión por unidad de volumen requerida para hacer fluir una probeta del mismo material sometida a tensión. Como se verá en la sección 11.6, la energía de distorsión por unidad de volumen en un material isotrópico bajo esfuerzo plano es

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \tag{7.25}$$

donde σ_a y σ_b son los esfuerzos principales y G el módulo de rigidez. En el caso particular de una probeta de tensión que empieza a fluir, se tiene $\sigma_a = \sigma_Y$, $\sigma_b = 0$ y $(u_d)_Y = \sigma_Y^2/6G$. Así, el criterio de la máxima energía de distorsión indica que el componente estructural es seguro siempre que $u_d < (u_d)_Y$, o

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \tag{7.26}$$

es decir, siempre que el punto de coordenadas σ_a y σ_b caiga dentro del área mostrada en la figura 7.41. Esta área está limitada por la elipse cuya ecuación es

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_Y^2 \tag{7.27}$$

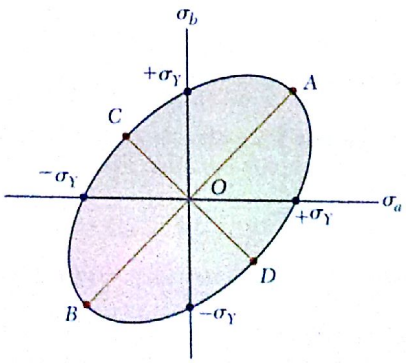


Figura 7.41

la cual interseca los ejes coordenados en $\sigma_a = \pm\sigma_Y$ y $\sigma_b = \pm\sigma_Y$. Puede verificarse que el pie mayor de la elipse biseca el primer y tercer cuadrantes desde A ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_Y$) hasta B ($\sigma_a = \sigma_b = -\sigma_Y$), mientras su eje menor se extiende desde C ($\sigma_a = -\sigma_b = -0.577\sigma_Y$) hasta D ($\sigma_a = -\sigma_b = 0.577\sigma_Y$).

En la figura 7.42 se comparan el criterio del esfuerzo cortante máximo con el de la energía máxima de distorsión. Note que la elipse pasa por los vértices del hexágono. En consecuencia, para los estados de esfuerzo representados por estos seis puntos, los dos criterios coinciden. Para cualquier otro

estado de esfuerzo, el criterio del esfuerzo cortante máximo es más conservador que el criterio de la máxima energía de distorsión, ya que el hexágono está dentro de la elipse.

Un estado de esfuerzo de interés particular es el que se asocia con la fluencia en la prueba de torsión. Recuerde de la figura 7.24 de la sección 7.4 que, para torsión $\sigma_{mín} = -\sigma_{máx}$; entonces, los puntos correspondientes en la figura 7.42 están localizados en el bisector del segundo y cuarto cuadrantes. Se sigue que la fluencia ocurre en una prueba de torsión cuando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0.5\sigma_Y$, de acuerdo con el criterio del esfuerzo cortante máximo y, cuando $\sigma_a = -\sigma_b = \pm 0.577\sigma_Y$ según el criterio de la máxima energía de distorsión. Pero recordando la figura 7.24, notamos que σ_a y σ_b deben ser iguales en magnitud a $\tau_{máx}$, esto es, el valor obtenido de una prueba de torsión para la resistencia de la cedencia τ_Y del material. Como los valores del límite de cedencia σ_Y en tensión y τ_Y en cortante están dados para varios materiales dúctiles en el apéndice B, puede calcularse la razón τ_Y/σ_Y para estos materiales y verificar que los valores obtenidos están entre 0.55 y 0.60. Por consiguiente, el criterio de la máxima energía de distorsión aparece un poco más aproximado que el criterio del esfuerzo cortante máximo en cuanto se refiere a predecir cedencia en torsión.

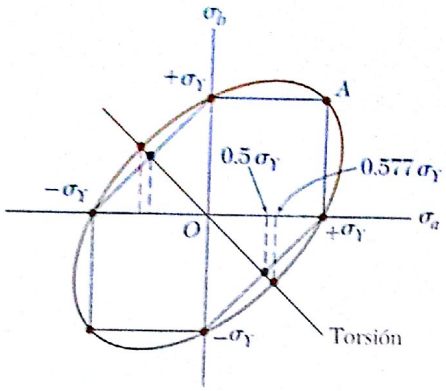


Figura 7.42

*7.8 CRITERIOS DE FRACTURA PARA MATERIALES FRÁGILES BAJO ESFUERZO PLANO

Como se vio en el capítulo 2, los materiales frágiles se caracterizan por el hecho de que cuando son sometidos a una prueba de tensión, fallan repentinamente por ruptura o fractura, sin cedencia. Cuando un elemento estructural o componente de máquina hecho de material frágil está bajo tensión uniaxial, el valor del esfuerzo normal que lo hace fallar es igual a la resistencia última del material σ_U, determinada de una prueba de tensión, puesto que ambos, la probeta de prueba de tensión y el elemento o componente bajo investigación, están en el mismo estado de esfuerzo. Sin embargo, cuando un elemento estructural o componente de máquina está en un estado de esfuerzo plano, es conveniente determinar primero los esfuerzos principales σ_a y σ_b en cualquier punto dado y usar uno de los criterios de esta sección para predecir si el elemento estructural o elemento de máquina fallará.

Criterio del esfuerzo normal máximo. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado falla cuando el esfuerzo normal máximo en el componente alcanza la resistencia última σ_U obtenida de una prueba de tensión de una probeta del mismo material. Así, el componente estructural será seguro mientras los valores absolutos de los esfuerzos principales σ_a y σ_b sean ambos menores que σ_U:

$$|\sigma_a| < \sigma_U \qquad |\sigma_b| < \sigma_U \tag{7.28}$$

El criterio del esfuerzo normal máximo puede expresarse gráficamente como se muestra en la figura 7.43. Si el punto obtenido dibujando los valores σ_a y σ_b de los esfuerzos principales cae dentro del área cuadrada mostrada en la figura, el componente estructural es seguro. Si cae fuera del área, el componente fallará.

El criterio del esfuerzo normal máximo, también conocido como *criterio de Coulomb*, en honor del físico francés Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), experimenta una importante limitación, puesto que se basa en la hipótesis de que la resistencia última del material es la misma a tensión

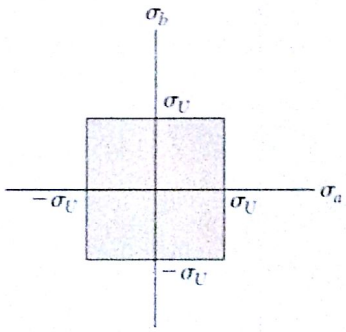


Figura 7.43

que a compresión. Como se observa en la sección 2.3 este caso se presenta raras veces, porque la presencia de fallas en el material, como grietas microscópicas o cavidades, que tienden a debilitar el material sometido a tensión, no afectan apreciablemente su resistencia a la compresión. Además, este criterio no considera efectos distintos de los esfuerzos normales en el mecanismo de falla del material.†

Criterio de Mohr. Este criterio, sugerido por el ingeniero alemán Otto Mohr, puede usarse para predecir el efecto de un estado dado de esfuerzo plano en un material frágil, cuando los resultados de varios tipos de pruebas están disponibles para el material.

Primero suponga que se han realizado una prueba de tensión y una de compresión en un material dado y que se han determinado los valores σ_{UT} y σ_{UC} de los esfuerzos últimos a tensión y a compresión para dicho material. El estado de esfuerzo correspondiente a la ruptura de la probeta a tensión puede representarse en un diagrama de círculo de Mohr por el círculo que interseca el eje horizontal en O y σ_{UT} (figura 7.44*a*). Análogamente, el estado de esfuerzo correspondiente a la falla de la probeta por compresión puede representarse por el círculo que corta al eje horizontal en O y en σ_{UC}. Es claro que un estado de esfuerzo representado por un círculo enteramente contenido en cualquiera de estos dos círculos será seguro. Así, si los dos esfuerzos principales son positivos, el estado de esfuerzo es seguro mientras $\sigma_a < \sigma_{UT}$ y $\sigma_b < \sigma_{UT}$; si ambos esfuerzos principales son negativos, el estado de esfuerzo es seguro siempre que $|\sigma_a| < |\sigma_{UC}|$ y $|\sigma_b| < |\sigma_{UC}|$. Dibujando el punto de coordenadas σ_a y σ_b (figura 7.44*b*), se verifica que el estado de esfuerzo es seguro mientras el punto caiga dentro de una de las áreas cuadradas mostradas en esa figura.

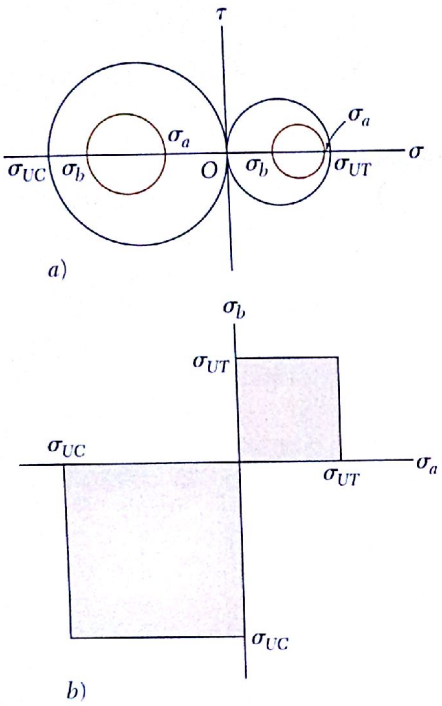


Figura 7.44

Para analizar los casos cuando σ_a y σ_b tienen signos opuestos, se supondrá que se ha realizado una prueba de torsión en el material y que se ha determinado su resistencia última a cortante, τ_U. Dibujando el círculo centrado en O, que representa el estado de esfuerzo correspondiente a la falla de la probeta en la prueba de torsión (figura 7.46*a*), se observa que cualquier estado de esfuerzo representado por un círculo contenido en ese círculo es también seguro. El criterio de Mohr es una extensión lógica de esta observación:

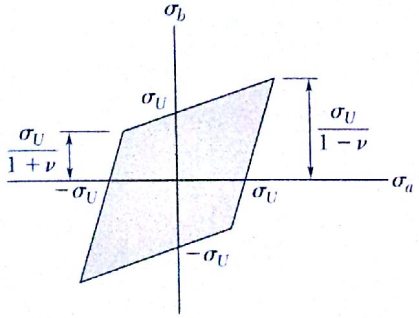


Figura 7.45

† Otro criterio de falla conocido como *máxima deformación normal* o de Saint-Venant, se usó ampliamente durante el siglo XIX. De acuerdo con este criterio, un componente estructural dado es seguro siempre que el valor máximo de la deformación normal en ese componente permanezca menor que un valor ϵ_U de la deformación a la cual fallará una probeta del mismo material a tensión. Pero, como se verá en la sección 7.12, la deformación es máxima a lo largo de uno de los ejes principales de esfuerzo, si la deformación es elástica y el material es homogéneo e isotrópico. Así, designando por ϵ_a y ϵ_b los valores de la deformación normal a lo largo de los ejes principales en el plano de esfuerzo, se escribe

$$|\epsilon_a| < \epsilon_U \qquad |\epsilon_b| < \epsilon_U \tag{7.29}$$

Haciendo uso de la ley general de Hooke (véase la sección 2.12) se podrían expresar estas relaciones en términos de los esfuerzos principales σ_a y σ_b y la resistencia última σ_U del material. Se encontraría que, de acuerdo con el criterio de la máxima deformación normal, el componente estructural es seguro mientras el punto obtenido al graficar σ_a y σ_b cae dentro del área mostrada en la figura 7.45 donde ν es la relación de Poisson para el material dado.

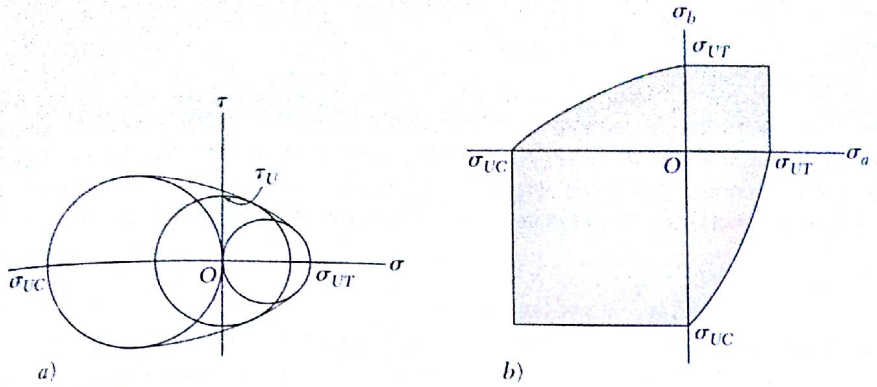


Figura 7.46

de acuerdo con el criterio de Mohr, un estado de esfuerzo es seguro si está representado por un círculo localizado enteramente dentro del área limitada por la envolvente de los círculos correspondientes a los datos disponibles. Las porciones restantes del diagrama de esfuerzos principales pueden obtenerse dibujando varios círculos tangentes a esta envolvente, determinando los valores correspondientes de σ_a y σ_b, y trazando los puntos de coordenadas σ_a y σ_b (figura 7.46*b*).

Algunos diagramas más exactos se pueden dibujar cuando hay disponibilidad de resultados de pruebas adicionales, correspondientes a varios estados de esfuerzo. Si, por otra parte, los únicos datos disponibles son las resistencias últimas σ_{UT} y σ_{UC}, la envolvente de la figura 7.46*a* se remplaza por las tangentes AB y $A'B'$ a los círculos correspondientes, respectivamente, a falla a tensión y falla a compresión (véase figura 7.47*a*). En los triángulos semejantes dibujados en esa figura, se observa que la abscisa del centro C de un círculo tangente a AB y a $A'B'$ está relacionada linealmente con su radio R. Como $\sigma_a = OC + R$ y $\sigma_b = OC - R$, se sigue que σ_a y σ_b también están linealmente relacionados. Así, el área sombreada correspondiente a este criterio simplificado de Mohr se encuentra limitada por líneas rectas en el segundo y cuarto cuadrantes (véase figura 7.47*b*).

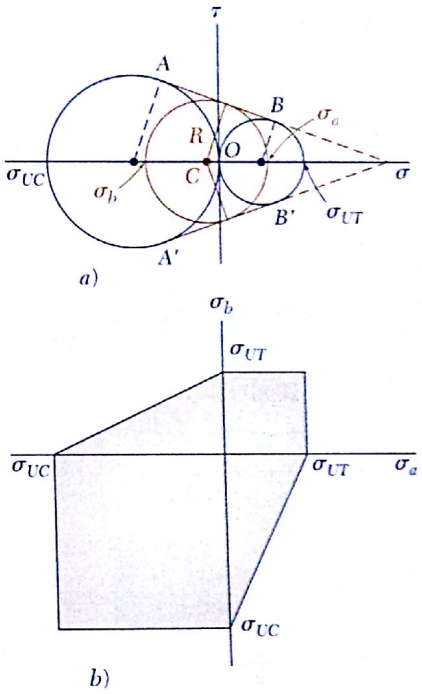
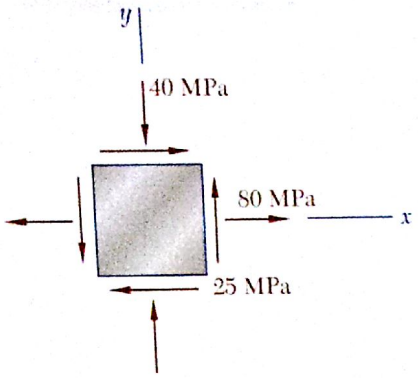


Figura 7.47

Note que para determinar si un componente estructural estará seguro bajo una carga dada, el estado de esfuerzo debe calcularse en todos los puntos críticos del componente, es decir, en todos los puntos donde pueden ocurrir concentraciones de esfuerzos. Esto se puede hacer, en unos casos, usando los factores de concentración de esfuerzos dados en las figuras 2.64, 3.32, 4.31 y 4.32. Hay muchas instancias, sin embargo, en donde debe usarse la teoría de la elasticidad para determinar el estado de esfuerzo en un punto crítico.

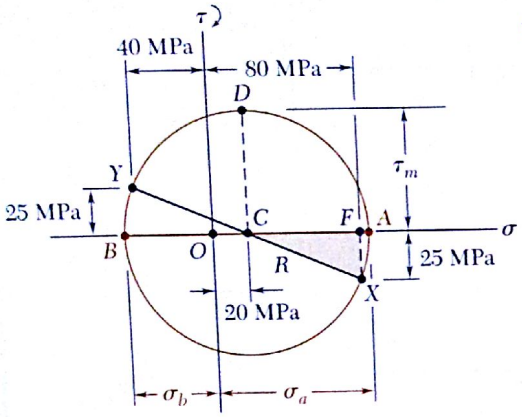
Debe tenerse un especial cuidado cuando se han detectado *grietas macroscópicas* en un componente estructural. Mientras pueda suponerse que la probeta utilizada para determinar la resistencia última del material a tensión contiene el mismo tipo de fallas (es decir, *grietas microscópicas* o cavidades) que el elemento estructural en estudio, la probeta está ciertamente libre de grietas macroscópicas detectables. Cuando se identifica una grieta en un componente estructural, es necesario determinar si esa grieta tenderá a propagarse bajo las condiciones de carga esperadas y hará fallar el componente o si permanecerá estable. Esto requiere un análisis que considere la energía asociada con el crecimiento de la grieta. Tal análisis está más allá de la finalidad de este texto y debe desarrollarse mediante los métodos de la mecánica de fracturas.



PROBLEMA MODELO 7.4

El estado de esfuerzo plano representado en la figura ocurre en un punto crítico de una máquina. Como resultado de varias pruebas de tensión, se ha encontrado que el límite de fluencia a tensión es $\sigma_Y = 250$ MPa para el grado de acero usado. Determine el factor de seguridad con respecto a la fluencia, usando: *a*) el criterio del esfuerzo cortante máximo y *b*) el criterio de la máxima energía de distorsión.

SOLUCIÓN



Círculo de Mohr. Se construye el círculo de Mohr para el estado dado de esfuerzo y se halla

$$\sigma_{\text{prom}} = OC = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65 \text{ MPa}$$

Esfuerzos principales

$$\sigma_a = OC + CA = 20 + 65 = +85 \text{ MPa}$$
$$\sigma_b = OC - BC = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$

***a*) Criterio de esfuerzo cortante máximo.** Como para el grado de acero utilizado la resistencia a tensión es $\sigma_Y = 250$ MPa, el esfuerzo cortante correspondiente a la fluencia es

$$\tau_Y = \tfrac{1}{2}\sigma_Y = \tfrac{1}{2}(250 \text{ MPa}) = 125 \text{ MPa}$$

Para $\tau_m = 65$ MPa:

$$F.S. = \frac{\tau_Y}{\tau_m} = \frac{125 \text{ MPa}}{65 \text{ MPa}} \qquad F.S. = 1.92 \blacktriangleleft$$

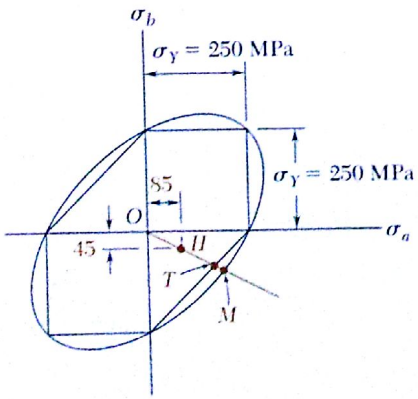
***b*) Criterio de la máxima energía de distorsión.** Introduciendo un factor de seguridad en la ecuación (7.26), se escribe

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 = \left(\frac{\sigma_Y}{F.S.}\right)^2$$

Para $\sigma_a = +85$ MPa, $\sigma_b = -45$ MPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, se tiene

$$(85)^2 - (85)(-45) + (45)^2 = \left(\frac{250}{F.S.}\right)^2$$

$$114.3 = \frac{250}{F.S.} \qquad F.S. = 2.19 \blacktriangleleft$$



Comentario. Para un material dúctil con $\sigma_Y = 250$ MPa, se ha dibujado el hexágono asociado con el criterio del esfuerzo cortante máximo y la elipse asociada con el criterio de la máxima energía de distorsión. El estado dado de esfuerzo plano está representado por el punto H de coordenadas $\sigma_a = 85$ MPa y $\sigma_b = -45$ MPa. Note que la línea recta dibujada por los puntos O y H interseca el hexágono en el punto T y la elipse, en el punto M. Para cada criterio, el valor obtenido del *F.S.* puede verificarse midiendo los segmentos indicados y calculando sus razones:

$$a)\ F.S. = \frac{OT}{OH} = 1.92 \qquad b)\ F.S. = \frac{OM}{OH} = 2.19$$

PROBLEMAS

7.66 Para el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_x = 0$ y $\sigma_y = 10$ ksi, *b*) $\sigma_x = 18$ ksi y $\sigma_y = 8$ ksi (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de él.)

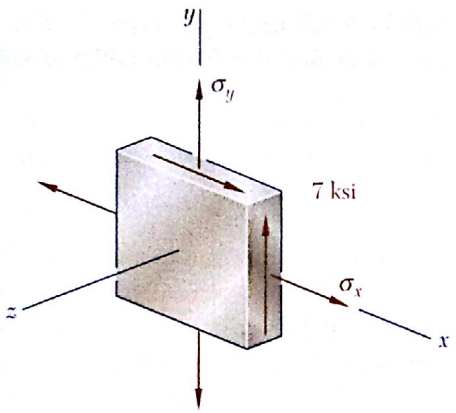


Figura P7.66 y *P7.67*

7.67 Para el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_x = 5$ ksi y $\sigma_y = 15$ ksi, *b*) $\sigma_x = 12$ ksi y $\sigma_y = 2$ ksi. (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de éste.)

7.68 Para el estado de esfuerzo plano ilustrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_y = 40$ MPa, *b*) $\sigma_y = 120$ MPa. (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de éste.)

7.69 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_y = 20$ MPa, *b*) $\sigma_y = 140$ MPa. (*Sugerencia*: Considere los esfuerzos cortantes en el plano y fuera de éste.)

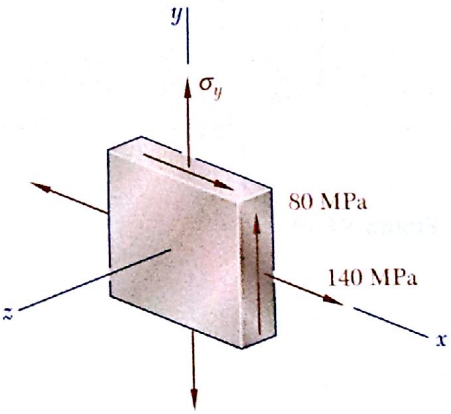


Figura P7.68 y P7.69

7.70 y 7.71 Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\sigma_z = +24$ MPa, *b*) $\sigma_z = -24$ MPa, *c*) $\sigma_z = 0$.

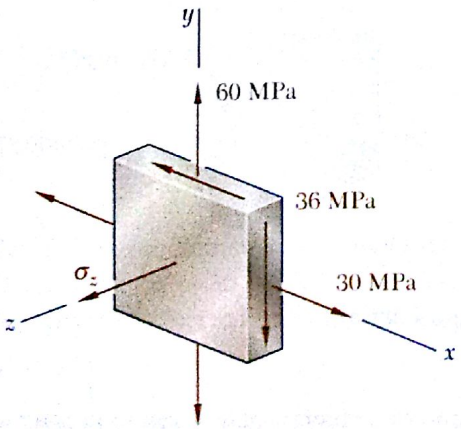


Figura P7.70

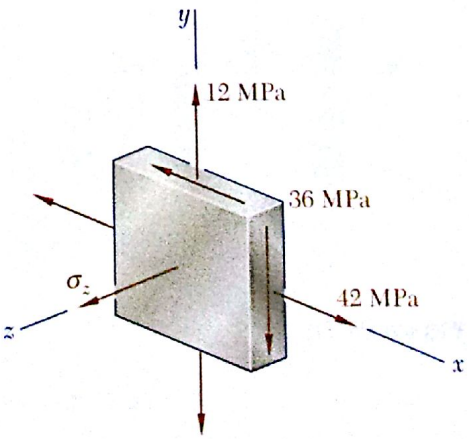


Figura P7.71

7.72 y 7.73 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine el esfuerzo cortante máximo cuando *a*) $\tau_{yz} = 17.5$ ksi, *b*) $\tau_{yz} = 8$ ksi, *c*) $\tau_{yz} = 0$.

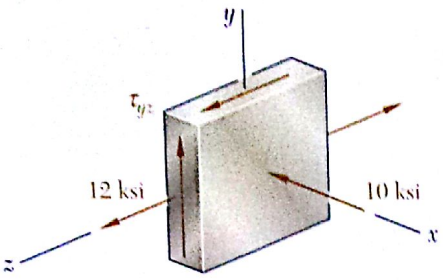


Figura P7.72

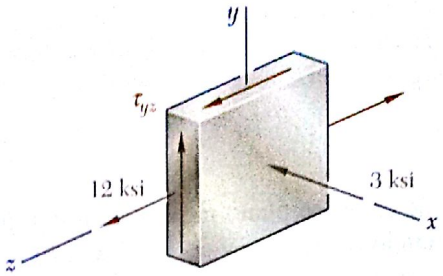


Figura *P7.73*

7.74 Para el estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura, determine dos valores de τ_{xy} para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de *a*) 60 MPa, *b*) 78 MPa.

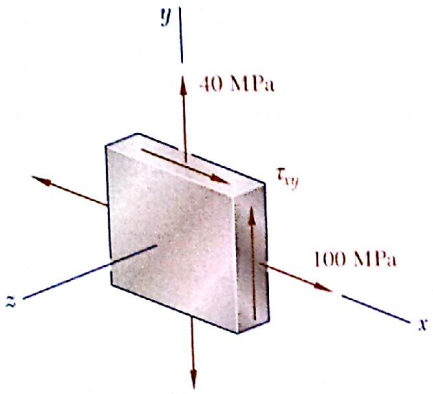


Figura P7.74

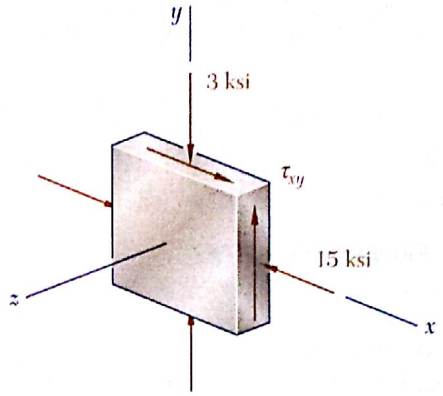


Figura P7.75

7.75 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es de *a*) 10 ksi, *b*) 8.25 ksi.

7.76 Para el estado de esfuerzo plano que se presenta en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de 7.5 ksi.

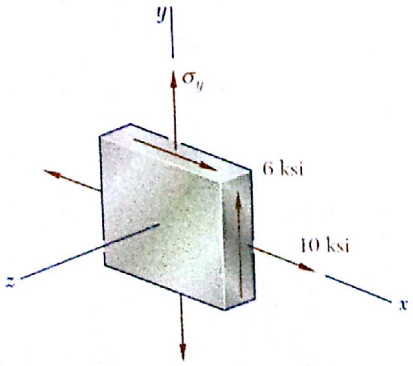


Figura P7.76

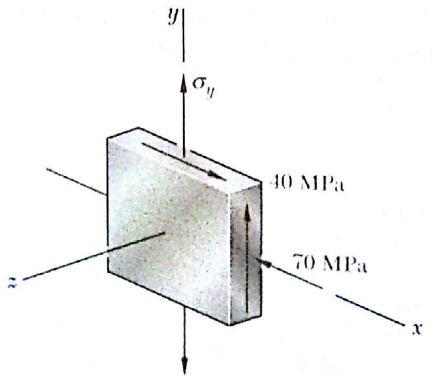


Figura *P7.77*

7.77 Para el estado de esfuerzo plano que se presenta en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de 75 MPa.

7.78 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de τ_{xz} para los cuales el esfuerzo cortante máximo es menor o igual que 90 MPa.

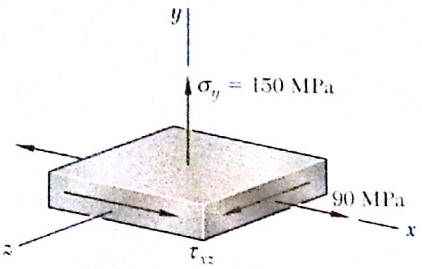


Figura P7.78

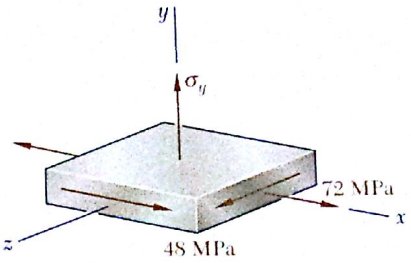


Figura *P7.79*

7.79 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine dos valores de σ_y para los cuales el esfuerzo cortante máximo es de 64 MPa.

***7.80** Para el estado de esfuerzo del problema 7.69, determine *a*) el valor de σ_y para el cual el esfuerzo cortante máximo es lo más pequeño posible, *b*) el valor correspondiente del esfuerzo cortante.

7.81 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurre en un componente estructural de acero de una máquina con σ_Y = 325 MPa. Con el criterio de la máxima energía de distorsión determine si ocurre cedencia cuando *a*) σ_0 = 200 MPa, *b*) σ_0 = 240 MPa, *c*) σ_0 = 280 MPa. Si no ocurre cedencia, determine el factor de seguridad correspondiente.

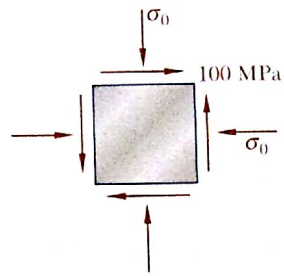


Figura P7.81

7.82 Retome el problema 7.81, y ahora considere el criterio del esfuerzo cortante máximo.

7.83 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina de acero con σ_Y = 36 ksi. Con el criterio de la máxima energía de distorsión, determine si ocurre cedencia cuando *a*) τ_{xy} = 15 ksi, *b*) τ_{xy} = 18 ksi, *c*) τ_{xy} = 21 ksi. Si la cedencia no ocurre, determine el factor de seguridad correspondiente.

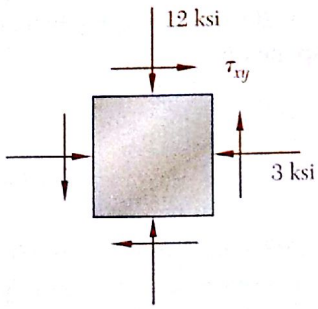


Figura P7.83

7.84 Retome el problema 7.83, y ahora use el criterio del esfuerzo cortante máximo.

7.85 El eje *AB* de 1.75 in. de diámetro está hecho de un grado de acero que tiene una resistencia a la cedencia σ_Y = 36 ksi. Con el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine la magnitud de la fuerza **P** para la cual se inicia la cedencia cuando T = 15 kip · in.

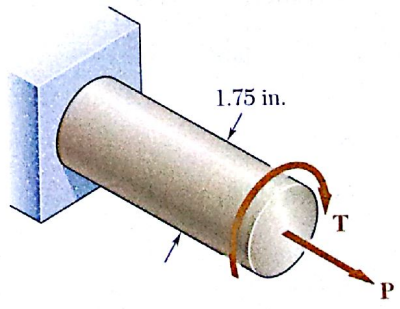


Figura P7.85

7.86 Retome el problema 7.85, y ahora use el criterio de la máxima energía de distorsión.

7.87 El eje AB de 36 mm de diámetro está hecho de un grado de acero cuyo esfuerzo de tensión hasta la cedencia es de 250 MPa. Con el criterio del esfuerzo cortante máximo, determine la magnitud del par de torsión **T** para el que ocurre la cedencia cuando $P = 200$ kN.

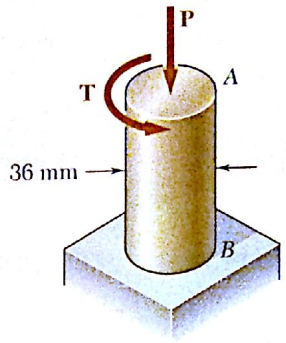


Figura *P7.87*

7.88 Retome el problema 7.87, y ahora use el criterio de la máxima energía de distorsión.

7.89 y 7.90 Se espera que el estado de esfuerzo plano mostrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de aluminio usada $\sigma_{UT} = 10$ ksi y $\sigma_{UC} = 30$ ksi, y con el criterio de Mohr determine si ocurrirá la ruptura del componente.

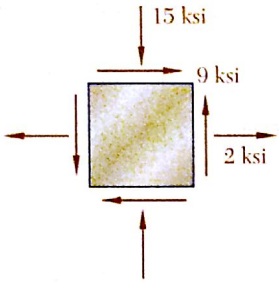


Figura P7.89

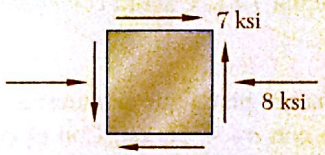


Figura P7.90

7.91 y 7.92 Se espera que el estado de esfuerzo plano ilustrado en la figura ocurra en una fundición de aluminio. Si se sabe que para la aleación de aluminio usada $\sigma_{UT} = 80$ MPa y $\sigma_{UC} = 200$ MPa, y con el criterio de Mohr determine si se producirá la ruptura del componente.

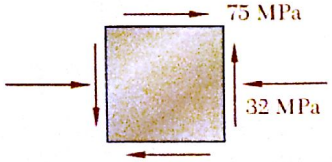


Figura P7.91

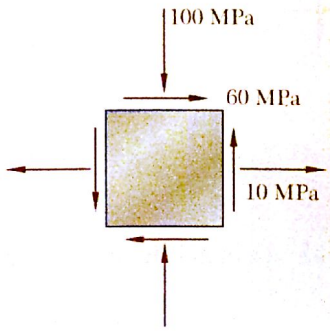


Figura P7.92

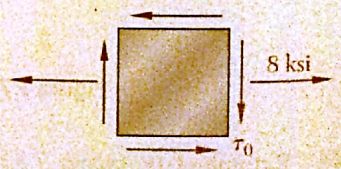


Figura *P7.93*

7.93 El estado de esfuerzo plano mostrado en la figura ocurrirá en un punto crítico de un tubo hecho de una aleación de aluminio para la cual $\sigma_{UT} = 10$ ksi y $\sigma_{UC} = 25$ ksi. Con el criterio de Mohr determine el esfuerzo cortante τ_0 en el cual puede presentarse la ruptura.

7.94 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurrirá en un punto crítico de un tubo que está hecho de una aleación de aluminio para la cual σ_{UT} = 75 MPa y σ_{UC} = 150 MPa. Use el criterio de Mohr y determine el esfuerzo cortante τ_0 para el cual se puede esperar una falla.

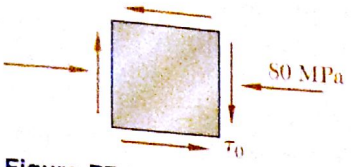


Figura P7.94

7.95 La varilla de aluminio fundido que se muestra en la figura está hecha de una aleación para la cual σ_{UT} = 70 MPa y σ_{UC} = 175 MPa. Si se sabe que la magnitud T del par aplicado se incrementa lentamente, utilice el criterio de Mohr para determinar el esfuerzo cortante τ_0 al cual se espera ocurrirá la ruptura.

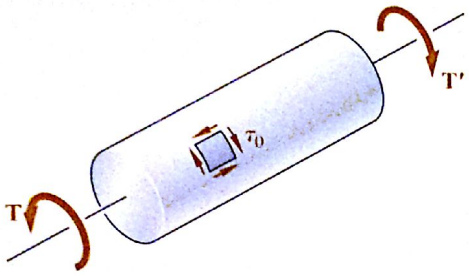


Figura P7.95

7.96 La varilla de aluminio fundido que se muestra en la figura está hecha de una aleación para la cual σ_{UT} = 60 MPa y σ_{UC} = 120 MPa. Use el criterio de Mohr y determine la magnitud del par de torsión **T** para el cual puede esperarse la ruptura.

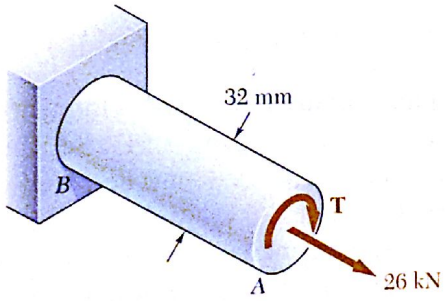


Figura P7.96

7.97 Un componente de máquina está elaborado de un hierro fundido para el cual σ_{UT} = 8 ksi y σ_{UC} = 20 ksi. Para cada estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura y con el criterio de Mohr, determine el esfuerzo normal σ_0 al cual se espera que ocurra la ruptura del componente.

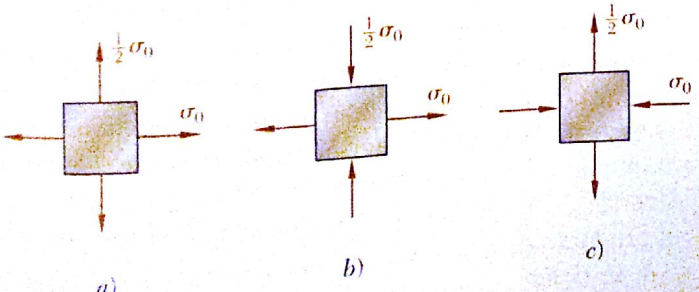


Figura P7.97

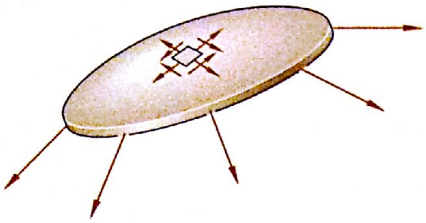


Figura 7.48

7.9 ESFUERZOS EN RECIPIENTES DE PARED DELGADA A PRESIÓN

Los recipientes de pared delgada constituyen una aplicación importante del análisis de esfuerzo plano. Como sus paredes oponen poca resistencia a la flexión, puede suponerse que las fuerzas internas ejercidas sobre una parte de la pared son tangentes a la superficie del recipiente (figura 7.48). Los esfuerzos resultantes en un elemento de pared estarán contenidos en un plano tangente a la superficie del recipiente.

El análisis de esfuerzos en recipientes de pared delgada se limitará a los dos tipos que se encuentran con mayor frecuencia: recipientes cilíndricos y esféricos (figuras 7.49 y 7.50).

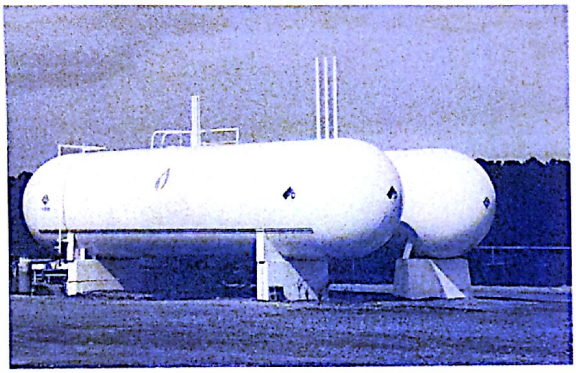


Figura 7.49

Figura 7.50

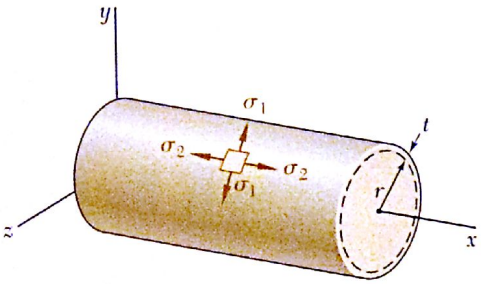


Figura 7.51

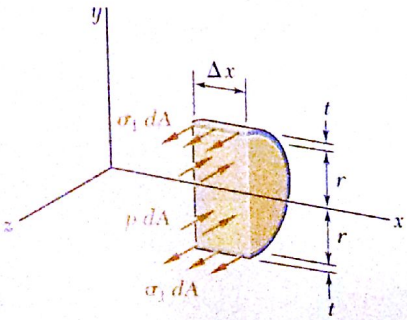


Figura 7.52

Considere un recipiente cilíndrico de radio interior r y espesor de pared t, que contiene un fluido a presión (figura 7.51). Se van a determinar los esfuerzos ejercidos sobre un pequeño elemento de pared con lados respectivamente paralelos y perpendiculares al eje del cilindro. Debido a la simetría axial del recipiente y de su contenido, es claro que no se ejercen esfuerzos cortantes sobre el elemento. Los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 mostrados en la figura 7.51 son por tanto esfuerzos principales. El esfuerzo σ_1 se conoce como *esfuerzo tangencial o de costilla* y se presenta en los aros de los barriles de madera; el esfuerzo σ_2 es el *esfuerzo longitudinal*.

Para determinar los esfuerzos de costilla σ_1 se retira una porción de recipiente y su contenido limitado por el plano xy y por dos planos paralelos al plano yz con una distancia Δx de separación entre ellos (figura 7.52). Las fuerzas paralelas al eje z que actúan en el cuerpo libre así definido consisten en las fuerzas internas elementales $\sigma_1\, dA$ en las secciones de pared y en las fuerzas de presión elementales $p\, dA$ ejercidas sobre la porción de fluido incluido en el cuerpo libre. Note que p es la *presión manométrica* del fluido, es decir, el exceso de la presión interior sobre la presión atmosférica exterior. La resultante de las fuerzas internas $\sigma_1\, dA$ es igual al producto de σ_1 y del área transversal $2t\ \Delta x$ de la pared, mientras que la resultante de las fuerzas $p\, dA$ es el producto de p y el área $2r\ \Delta x$. Escribiendo la ecuación de equilibrio $\Sigma F_z = 0$, se tiene

$$\Sigma F_z = 0: \qquad \sigma_1(2t\,\Delta x) - p(2r\,\Delta x) = 0$$

y resolviendo para el esfuerzo de costilla σ_1

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{7.30}$$

Para determinar el esfuerzo longitudinal σ_2, se realizará ahora un corte perpendicular al eje x y se considerará el cuerpo libre que consta de la parte del recipiente y de su contenido a la izquierda de la sección (figura 7.53).

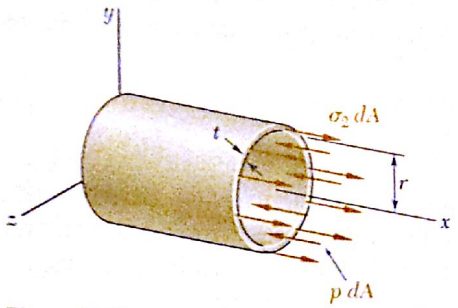


Figura 7.53

Las fuerzas que actúan en este cuerpo libre son las fuerzas internas elementales $\sigma_2\,dA$ en la sección de pared y las fuerzas elementales de presión $p\,dA$ ejercidas sobre la porción de fluido incluido en el cuerpo libre. Notando que el área de la sección de fluido es πr^2 y que el área de la sección de la pared puede obtenerse multiplicando la circunferencia $2\pi r$ del cilindro por su espesor de pared t, se escribe la ecuación de equilibrio[†]

$$\Sigma F_x = 0: \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

y despejando para el esfuerzo longitudinal σ_2

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.31}$$

Observe en las ecuaciones (7.30) y (7.31) que el esfuerzo de costilla σ_1 es el doble del esfuerzo longitudinal σ_2:

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 \tag{7.32}$$

[†] Usando el radio medio de la sección de la pared, $r_m = r + \frac{1}{2}t$, al calcular la resultante de las fuerzas en esa sección se obtendría un valor más aproximado del esfuerzo longitudinal:

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}\frac{1}{1 + \dfrac{t}{2r}} \tag{7.31'}$$

Sin embargo, para un recipiente de pared delgada, el término $t/2r$ es suficientemente pequeño para permitir el uso de la ecuación (7.31) en diseño y en análisis de ingeniería. Si un recipiente de presión no es de pared delgada (si $t/2r$ no es pequeño), los esfuerzos σ_1 y σ_2 varían a través de la pared y deben calcularse por los métodos de la teoría de la elasticidad.

Dibujando el círculo de Mohr por los puntos A y B, que corresponde respectivamente a los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 (figura 7.54), y recordando que el esfuerzo cortante máximo en el plano es igual al radio del círculo, se tiene

$$\tau_{\text{máx (en el plano)}} = \tfrac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t} \tag{7.33}$$

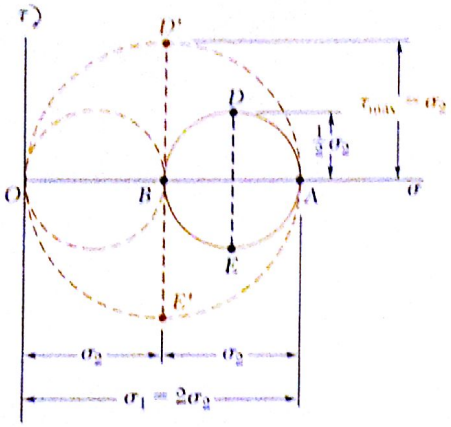


Figura 7.54

Este esfuerzo corresponde a los puntos D y E y se ejerce sobre un elemento obtenido mediante la rotación de 45° del elemento original de la figura 7.51, *dentro del plano* tangente a la superficie del recipiente. El esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente, sin embargo, es mayor. Es igual al radio del círculo de diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° alrededor de un eje longitudinal y *fuera del plano* de esfuerzo.[†] Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.34}$$

Considere ahora un recipiente esférico, de radio interior r y espesor de pared t, que contiene un fluido bajo presión manométrica p. Observe que, por simetría, los esfuerzos en las cuatro caras de un elemento pequeño de pared deben ser iguales (figura 7.55). Se tiene

$$\sigma_1 = \sigma_2 \tag{7.35}$$

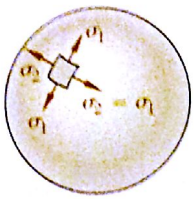


Figura 7.55

Para determinar el valor del esfuerzo, se hace un corte por el centro C del recipiente y se considera el cuerpo libre que consta de la porción de recipiente y su contenido, a la izquierda de la sección (figura 7.56) La ecuación de equilibrio de este cuerpo libre es la misma que para el cuerpo libre de la figura 7.53. Así se concluye que, para un recipiente esférico,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{7.36}$$

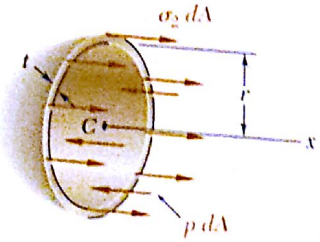


Figura 7.56

Como los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son iguales, el círculo de Mohr para la transformación de esfuerzos, dentro del plano tangente a la superficie del recipiente, se reduce a un punto (figura 7.57). Se concluye que el esfuerzo normal en el plano es constante y que el esfuerzo cortante máximo en el plano es cero. El esfuerzo cortante máximo en la pared del recipiente, sin embargo, no es cero; es igual al radio del círculo del diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° fuera del plano de esfuerzo. Se tiene

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \tag{7.37}$$

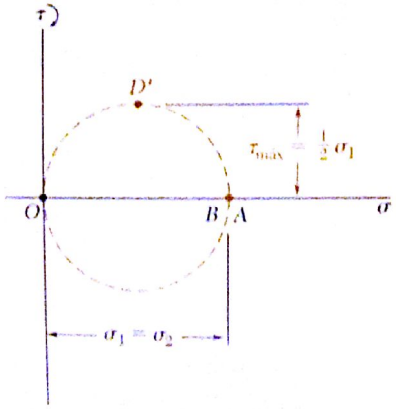
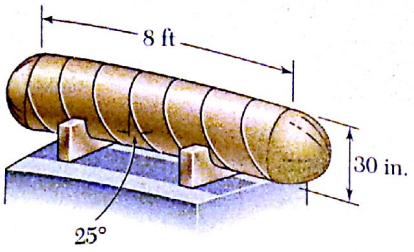


Figura 7.57

[†] Debe observarse que aunque el tercer esfuerzo principal es cero en la superficie exterior del recipiente, es igual a $-p$ en la superficie interna y está representado por un punto $C(-p, 0)$ en el diagrama de Mohr. Así, cerca a la superficie interna del recipiente, el esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro CA y se tiene

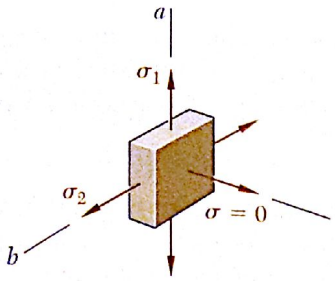
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + p) = \frac{pr}{2t}\left(1 + \frac{t}{r}\right)$$

Para un recipiente de pared delgada, sin embargo, el término t/r es pequeño y puede despreciarse la variación de $\tau_{\text{máx}}$ a través de la sección de la pared. Esto se aplica también a los recipientes de presión esféricos.



PROBLEMA MODELO 7.5

Un tanque de aire comprimido está apoyado por dos soportes como se indica en la figura; uno de los soportes está diseñado de tal modo que no ejerce ninguna fuerza longitudinal sobre el tanque. El cuerpo cilíndrico del tanque tiene 30 in. de diámetro exterior y está hecho de placa de acero de $\frac{3}{8}$ in. con soldadura de botón en hélice que forma 25° con un plano transversal. Los extremos son esféricos con un espesor uniforme de $\frac{5}{16}$ in. Para una presión manométrica interior de 180 psi, determine: *a*) el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante máximo en los extremos esféricos, *b*) los esfuerzos en dirección perpendicular y paralela a la soldadura helicoidal.



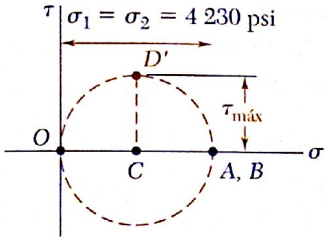
SOLUCIÓN

***a*) Tapa esférica.** Usando la ecuación (7.36), se escribe

$$p = 180 \text{ psi}, t = \tfrac{5}{16} \text{ in.} = 0.3125 \text{ in.}, r = 15 - 0.3125 = 14.688 \text{ in.}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{(180 \text{ psi})(14.688 \text{ in.})}{2(0.3125 \text{ in.})} \qquad \sigma = 4\,230 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

Se observa que para esfuerzos en un plano tangente a la tapa, el círculo de Mohr se reduce a un punto (*A*, *B*) en el eje horizontal y que todos los esfuerzos cortantes en el plano son cero. En la superficie de la tapa, el tercer esfuerzo principal es cero y corresponde al punto *O*. En un círculo de Mohr de diámetro *AO*, el punto *D'* es el de esfuerzo cortante máximo y ocurre en planos a 45° del plano tangente a la tapa.



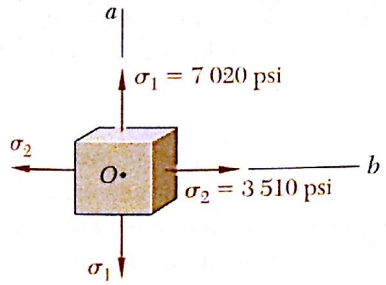
$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(4\,230 \text{ psi}) \qquad \tau_{\text{máx}} = 2\,115 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

***b*) Cuerpo cilíndrico del tanque.** Primero se calcula el esfuerzo de costilla σ_1 y el esfuerzo longitudinal σ_2. Usando las ecuaciones (7.30) y (7.32), se escribe

$$p = 180 \text{ psi}, t = \tfrac{3}{8} \text{ in.} = 0.375 \text{ in.}, r = 15 - 0.375 = 14.625 \text{ in.}$$

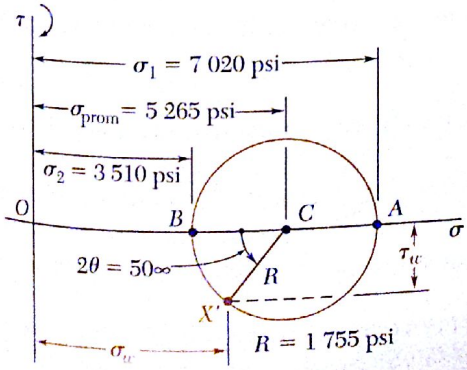
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(180 \text{ psi})(14.625 \text{ in.})}{0.375 \text{ in.}} = 7\,020 \text{ psi} \qquad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = 3\,510 \text{ psi}$$

$$\sigma_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 5\,265 \text{ psi} \qquad R = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 1\,755 \text{ psi}$$



Esfuerzos en la soldadura. Notando que tanto el esfuerzo de costilla como el longitudinal son esfuerzos principales, se traza el círculo de Mohr mostrado en la figura.

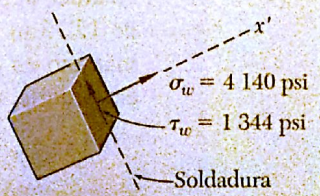
El elemento con cara paralela a la soldadura se obtiene rotando 25° la cara normal al eje *Ob* en sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces, se localiza en el círculo de Mohr el punto *X'*, que corresponde a las componentes del esfuerzo en la soldadura rotando el radio *CB* $2\theta = 50°$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.



$$\sigma_w = \sigma_{\text{prom}} - R \cos 50° = 5\,265 - 1\,755 \cos 50° \qquad \sigma_w = +4\,140 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

$$\tau_w = R \operatorname{sen} 50° = 1\,755 \operatorname{sen} 50° \qquad \tau_w = 1\,344 \text{ psi} \blacktriangleleft$$

Como *X'* está por debajo del eje horizontal, τ_w tiende a rotar al elemento en sentido contrario al de las agujas del reloj.



PROBLEMAS

7.98 Una pelota de baloncesto tiene 300 mm de diámetro exterior y 3 mm de espesor de pared. Determine el esfuerzo normal en la pared cuando ésta se encuentra inflada a una presión manométrica de 120 kPa.

7.99 Se fabricará un recipiente esférico a presión de 1.2 m de diámetro externo, con un acero que tiene una resistencia última $\sigma_u = 450$ MPa. Si se desea un factor de seguridad de 4.0 y la presión manométrica puede alcanzar 3 MPa, determine el espesor mínimo de pared que debe usarse.

7.100 Un contenedor esférico para gas hecho de acero tiene 20 ft de diámetro exterior y una pared con $\frac{7}{16}$ in. de espesor. Si se sabe que la presión interna es de 75 psi, determine los esfuerzos máximos normal y cortante en el contenedor.

7.101 Un recipiente esférico a presión tiene un diámetro exterior de 3 m y un espesor de pared de 12 mm. Si se sabe que para el acero usado $\sigma_{perm} = 80$ MPa, $E = 200$ GPa, y $\nu = 0.29$, determine *a*) la presión manométrica permisible, *b*) el incremento correspondiente en el diámetro del recipiente.

7.102 Un contenedor esférico para gas de 15 ft de diámetro externo y espesor de pared de 0.90 in. está hecho de acero con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$. Si se sabe que la presión medida en el contenedor se incrementa de cero a 250 psi, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en el contenedor, *b*) el incremento en el diámetro del contenedor.

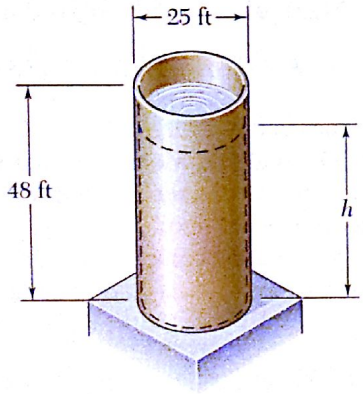


Figura P7.104

7.103 Se sabe que en un recipiente esférico a presión, con 200 mm de diámetro externo y una pared de 6 mm de espesor, se tiene una presión manométrica máxima de 10 MPa. Si el esfuerzo último en el acero usado es $\sigma_u = 400$ MPa, determine el factor de seguridad dado por la falla a tensión.

7.104 El tanque de almacenamiento no presurizado que se muestra en la figura tiene un espesor de pared de $\frac{3}{16}$ in. y está hecho de un acero con esfuerzo último en tensión de 60 ksi. Determine la altura h máxima a la cual puede llenarse con agua si se desea un factor de seguridad de 4.0 (El peso específico del agua es de 62.4 lb/ft^3.)

7.105 Para el tanque de almacenamiento del problema 7.104, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la pared cilíndrica cuando el tanque se llena a su capacidad ($h = 48$ ft).

7.106 Un tubo de acero de peso estándar con un diámetro nominal de 12 in. conduce agua bajo una presión de 400 psi. *a*) Si se sabe que el diámetro exterior es de 12.75 in. y el espesor de pared es de 0.375 in., determine el esfuerzo de tensión máximo en el tubo. *b*) Retome el inciso *a*), y ahora suponga que se utiliza un tubo extrafuerte, con 12.75 in. de diámetro exterior y 0.500 in. de grosor de pared.

7.107 Un tanque de almacenamiento contiene propano líquido con una presión de 210 psi a una temperatura de 100°F. Si se sabe que el tanque tiene un diámetro exterior de 12.6 in. y un espesor de pared de 0.11 in., determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque.

7.108 El tanque de almacenamiento que se muestra en la figura 7.49 tiene un diámetro exterior de 3.5 m y un espesor de pared de 20 mm. determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque cuando su presión interna es de 1.2 MPa.

7.109 Determine la máxima presión interna que puede aplicarse a un tanque cilíndrico de 1.75 m de diámetro exterior y una pared con espesor de 16 mm. si el esfuerzo normal último del acero usado es de 450 MPa y se desea un factor de seguridad de 5.0.

7.110 Una tubería de carga es de acero y tiene 750 mm de diámetro exterior y 12 mm de espesor de pared. La tubería conecta un embalse en *A* con una estación generadora en *B*. Si se sabe que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3. determine los esfuerzos normal y cortante máximos en la tubería bajo condiciones estáticas.

7.111 Una tubería de carga que es de acero y tiene 750 mm de diámetro. conecta un embalse en *A* con una estación generadora en *B*. Si se sabe que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3 y que el esfuerzo normal permisible del acero es de 85 MPa, determine el espesor mínimo que puede tener la tubería.

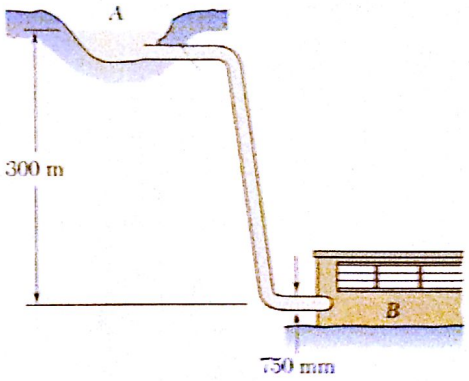


Figura P7.110 y P7.111

7.112 El tanque a presión que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 30 in. y un grosor de pared de 0.375 in. Si se sabe que las costuras de soldadura a lo largo de una hélice forman un ángulo $\beta = 50°$ con el eje longitudinal del tanque y que la presión manométrica en éste es de 200 psi, determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

7.113 El tanque presurizado que se muestra en la figura se fabricó soldando tiras de placa a lo largo de una hélice que forma un ángulo β con un plano transversal. Determine el máximo valor de β que puede usarse si el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura no debe ser mayor que 85 por ciento del esfuerzo máximo en el tanque.

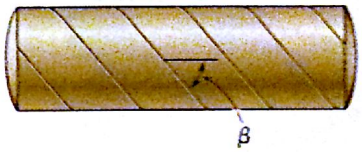


Figura P7.112 y P7.113

7.114 La porción cilíndrica del tanque de aire comprimido, que se muestra en la figura, está fabricada con una placa de 0.25 in. de espesor, soldada en hélice y formando un ángulo $\beta = 30°$ con la horizontal. Si se sabe que el esfuerzo permisible normal a la soldadura es de 10.5 ksi, determine la máxima presión manométrica que puede usarse en el tanque.

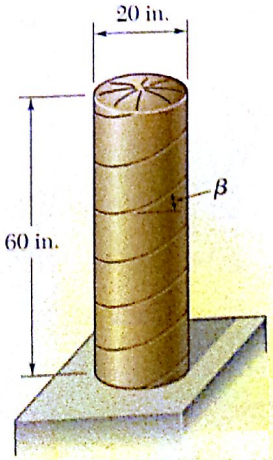


Figura *P7.114*

7.115 Para el tanque de aire comprimido del problema 7.114, determine la presión manométrica que causaría un esfuerzo cortante paralelo a la soldadura de 4 ksi.

7.116 Varias placas cuadradas, cada una de 16 mm de espesor, pueden soldarse en una de las dos formas que se muestran en la figura para construir la parte cilíndrica de un tanque de aire comprimido. Si se sabe que el esfuerzo normal permisible perpendicular a la soldadura es de 65 MPa, determine la máxima presión manométrica permisible en cada caso.

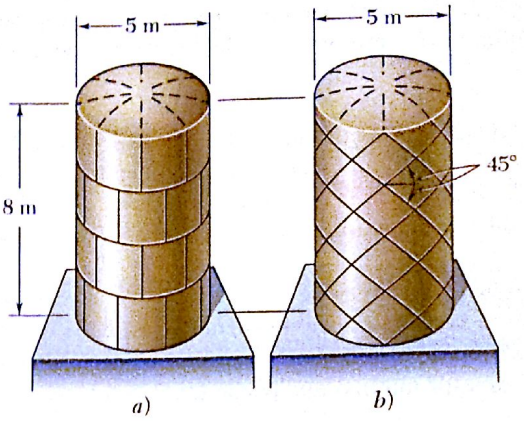


Figura P7.116

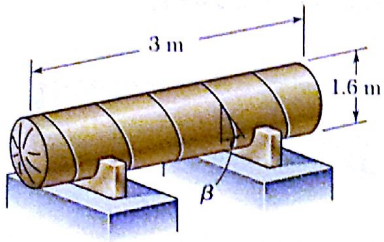


Figura P7.117

7.117 El tanque a presión que se muestra en la figura tiene una pared con 8 mm de espesor, la cual está soldada a lo largo de una hélice que forma un ángulo $\beta = 20°$ con un plano transversal. Para una presión manométrica de 600 kPa, determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

7.118 Para el tanque del problema 7.117, determine la máxima presión manométrica permisible, si se sabe que el esfuerzo normal permisible perpendicular a la soldadura es de 120 MPa y el esfuerzo cortante permisible paralelo a la soldadura es de 80 MPa.

7.119 Para el tanque del problema 7.117, determine el rango de valores de β que pueden usarse si el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura no debe exceder de 12 MPa cuando la presión manométrica sea de 600 kPa.

7.120 Un par de torsión con magnitud $T = 12$ kN · m se aplica al extremo de un tanque que contiene aire comprimido bajo una presión de 8 MPa. Si el tanque tiene 180 mm de diámetro interno y 12 mm de espesor de pared, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque.

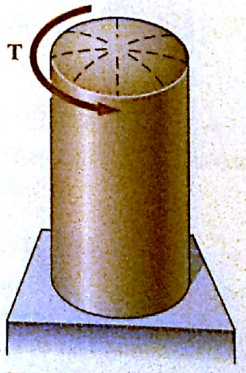


Figura *P7.120* y *P7.121*

7.121 El tanque que se muestra en la figura tiene un diámetro interior de 180 mm y una pared con espesor de 12 mm. Si se sabe que el tanque contiene aire comprimido a una presión de 8 MPa, determine la magnitud T del par aplicado para el cual el esfuerzo normal máximo en el tanque es de 75 MPa.

7.122 Un recipiente a presión con un diámetro interior de 10 in. y una pared con espesor de 0.25 in. está hecho de una sección AB de 4 ft de tubo soldado en espiral y se encuentra equipado con dos placas rígidas en los extremos. La presión manométrica dentro del recipiente es de 300 psi y se aplican fuerzas céntricas axiales **P** y **P′** de 10 kips a las placas de los extremos. Determine *a*) el esfuerzo normal perpendicular a la soldadura, *b*) el esfuerzo cortante paralelo a la soldadura.

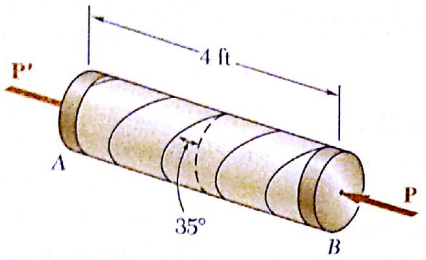


Figura P7.122

7.123 Retome el problema 7.122, y ahora suponga que la magnitud P de las dos fuerzas se incrementa a 30 kips.

7.124 El tanque de aire comprimido AB tiene un diámetro exterior de 250 mm y un espesor de pared de 8 mm. El tanque se ajusta con un collarín mediante el cual se aplica en B una fuerza **P** de 40 kN en la dirección horizontal. Si se sabe que la presión manométrica dentro del tanque es de 5 MPa, determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto K.

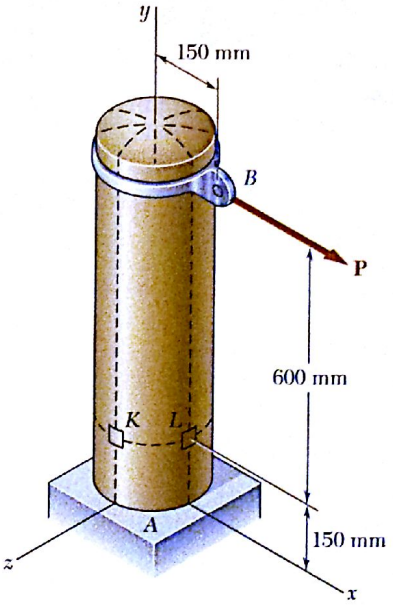


Figura P7.124

7.125 En el problema 7.124 determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el punto L.

7.126 Un anillo de latón de 5 in. de diámetro exterior y de 0.25 in. de espesor se ajusta exactamente en el interior de un anillo de acero de 5 in. de diámetro interior y 0.125 in. de espesor cuando la temperatura de los dos anillos es de 50°F. Si se sabe que la temperatura de ambos anillos se eleva a 125°F, determine *a*) el esfuerzo de tensión en el anillo de acero, *b*) la presión correspondiente ejercida por el anillo de latón sobre el de acero.

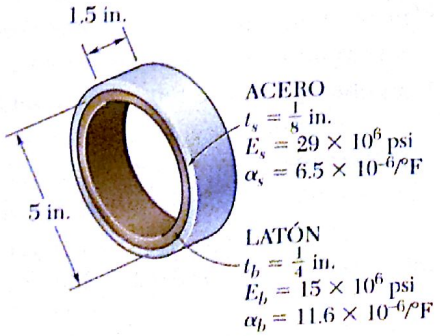


Figura P7.126

7.127 Retome el problema 7.126, y ahora suponga que el anillo de latón tiene un espesor de 0.125 in. y que el anillo de acero tiene un espesor de 0.25 in.

*7.10 TRANSFORMACIÓN DE DEFORMACIÓN PLANA

Se analizarán ahora transformaciones de la *deformación* cuando los ejes coordenados giran. El análisis primero se limitará a estados de *deformación plana*, es decir, a situaciones en donde las deformaciones del material tienen lugar dentro de planos paralelos y son las mismas en cada uno de estos planos. Si se escoge el eje z perpendicular a los planos en los cuales la deformación tiene lugar, se tiene $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, las únicas componentes de deformación que restan son ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}. Tal situación ocurre en una placa sometida a cargas uniformemente distribuidas a lo largo de sus bordes y que está impedida para expandirse o contraerse lateralmente mediante soportes fijos, rígidos y lisos (figura 7.58). También se encontrará una barra de longitud infinita sometida, en sus lados, a cargas uniformemente distribuidas ya que, por razones de simetría, los elementos situados en un plano transversal no pueden salirse de él. Este modelo idealizado muestra que en el caso real de una barra larga sometida a cargas transversales uniformemente distribuidas (véase figura 7.59), existe un estado de esfuerzo plano en cualquier sección transversal que no esté localizada demasiado cerca de uno de los extremos de la barra.[†]

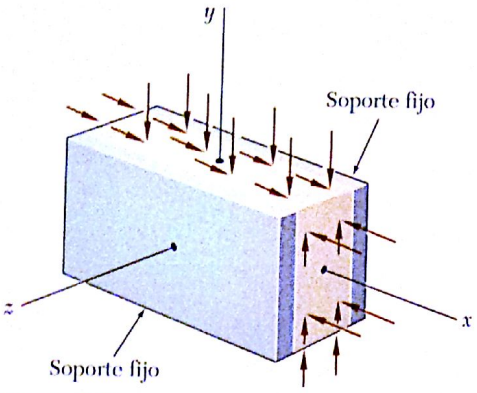


Figura 7.58

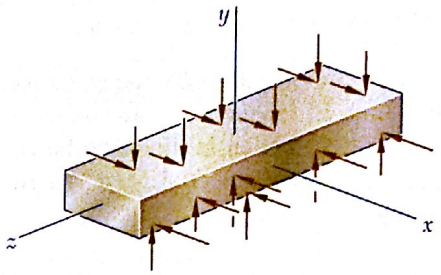


Figura 7.59

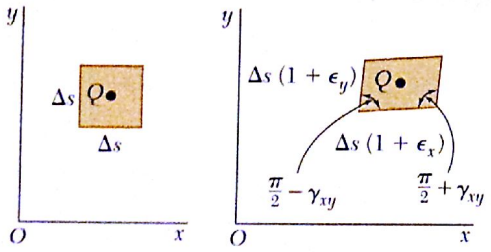


Figura 7.60

Suponga que existe un estado de esfuerzo plano en el punto Q (con $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$), definido por las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con los ejes x y y. Como se estudió en las secciones 2.12 y 2.14, esto significa que un elemento cuadrado de centro Q, con lados de longitud Δs respectivamente paralelos a los ejes x y y, se transforma en un paralelogramo con lados de longitud $\Delta s\,(1 + \epsilon_x)$ y $\Delta s\,(1 + \epsilon_y)$, formando ángulos de $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$ y $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ entre sí (figura 7.60). Recuerde que, como resultado de las deformaciones de los otros elementos localizados en el plano xy, el elemento considerado también puede experimentar un movimiento de cuerpo rígido, pero tal movimiento es insignificante en lo referente a la determinación de las deformaciones en el punto Q y no se tendrá en cuenta en este análisis. El propósito es determinar en términos de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} y θ las componentes de deformación $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ asociadas con el marco de referencia $x'y'$ obtenido mediante la rotación de los ejes x y y un ángulo θ. Como se observa en la figura 7.61, estas nuevas componentes de la deformación definen el paralelogramo en que se transforma un cuadrado con lados respectivamente paralelos a los ejes x' y y'.

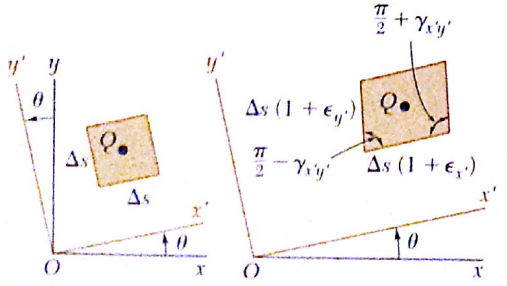


Figura 7.61

[†] Se debe observar que un estado de *deformación plana* y un estado de *esfuerzo plano* (véase la sección 7.1) no ocurren simultáneamene, excepto con materiales ideales que tienen una razón de Poisson igual a cero. Las restricciones en los elementos de la platina de la figura 7.58 y de la barra de la figura 7.59 resultan en un esfuerzo σ_z diferente de cero. Por otra parte, en el caso de la placa de la figura 7.3, la ausencia de cualquier restricción lateral se transforma en $\sigma_z = 0$ y $\epsilon_z \neq 0$.

Primero se derivará una expresión para la deformación normal $\epsilon(\theta)$ a lo largo de una línea AB que forma un ángulo arbitrario θ con el eje x. Para hacerlo considere el triángulo rectángulo ABC con AB como hipotenusa (figura 7.62*a*) y el triángulo oblicuo $A'B'C'$, en el cual se transforma el triángulo ABC (figura 7.62*b*). Si Δs es la longitud de AB, la longitud de $A'B'$ se expresa como $\Delta s\,[1 + \epsilon(\theta)]$. Análogamente, llamando Δx y Δy las longitudes de AC y CB, las longitudes de $A'C'$ y $C'B'$ serán $\Delta x\,(1 + \epsilon_x)$ y $\Delta y\,(1 + \epsilon_y)$, respectivamente. Recordando, de la figura 7.60, que el ángulo recto en C en la figura 7.62*a* se transforma en un ángulo igual a $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$ en la figura 7.62*b* y aplicando la ley de los cosenos al triángulo $A'B'C'$, se tiene

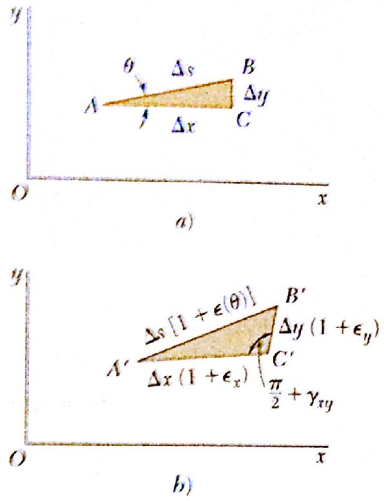


Figura 7.62

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B')\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right)$$

$$(\Delta s)^2[1 + \epsilon(\theta)]^2 = (\Delta x)^2(1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2(1 + \epsilon_y)^2 - 2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \qquad (7.38)$$

Pero, de la figura 7.62*a*,

$$\Delta x = (\Delta s)\cos\theta \qquad \Delta y = (\Delta s)\,\text{sen}\,\theta \qquad (7.39)$$

y, como γ_{xy} es muy pequeño

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) = -\text{sen}\,\gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy} \qquad (7.40)$$

Sustituyendo de las ecuaciones (7.39) y (7.40) en la ecuación (7.38), recordando que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, y despreciando los términos de segundo orden en $\epsilon(\theta)$, ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, se escribe

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x\cos^2\theta + \epsilon_y\,\text{sen}^2\,\theta + \gamma_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad (7.41)$$

La ecuación (7.41) permite hallar la deformación normal $\epsilon(\theta)$ en cualquier dirección AB, en función de las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} y del ángulo θ que forma AB con el eje x. Observe que, para $\theta = 0$, la ecuación (7.41) produce $\epsilon(0) = \epsilon_x$ y que para $\theta = 90°$, da $\epsilon(90°) = \epsilon_y$. Por otra parte, haciendo $\theta = 45°$ en la ecuación (7.41), se obtiene la deformación normal en la dirección de la bisectriz OB del ángulo entre los ejes x y y (figura 7.63). Representando esta deformación por ϵ_{OB}, se tiene

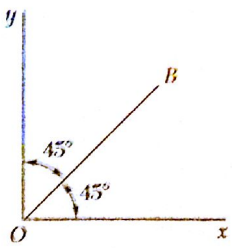


Figura 7.63

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45°) = \tfrac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \qquad (7.42)$$

Resolviendo la ecuación (7.42) para γ_{xy},

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \qquad (7.43)$$

Esta relación permite expresar la *deformación cortante* asociada con un par de ejes rectangulares en función de las *deformaciones normales* medidas a lo largo de estos ejes y de su bisectriz. Dicha relación desempeñará un papel fundamental en la derivación presente y también se usará en la sección 7.13 en conexión con la determinación experimental de las deformaciones cortantes.

Recordando que el propósito principal de esta sección es expresar las componentes de la deformación asociadas con el marco de referencia $x'y'$ de la figura 7.61 en términos del ángulo θ y de las componentes de la formación ϵ_x, ϵ_y, y γ_{xy}, asociadas con los ejes x y y, se nota que la deformación normal $\epsilon_{x'}$ a lo largo del eje x' está dada por la ecuación (7.41). Usando las relaciones trigonométricas (7.3) y (7.4), se escribe esta ecuación en la forma alternativa

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \tag{7.44}$$

Reemplazando θ por $\theta + 90°$, se obtiene la deformación normal a lo largo del eje y'. Como $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen}(2\theta + 180°) = -\operatorname{sen} 2\theta$, se tiene

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \tag{7.45}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7.44) y (7.45), se obtiene

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y \tag{7.46}$$

Puesto que $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = 0$, se verifica, en el caso de la deformación plana, que la suma de las deformaciones normales asociadas con un elemento cúbico de material es independiente de la orientación del elemento.†

Reemplazando ahora θ por $\theta + 45°$ en la ecuación (7.44), se obtiene una expresión para la deformación normal a lo largo de la bisectriz OB' del ángulo formado por los ejes x' y y'. Como $\cos(2\theta + 90°) = -\operatorname{sen} 2\theta$ y $\operatorname{sen}(2\theta + 90°) = -\cos 2\theta$ se tiene

$$\epsilon_{OB'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \tag{7.47}$$

Escribiendo la ecuación (7.43) con respecto a los ejes x' y y', se expresa la deformación cortante $\gamma_{x'y'}$ en función de las deformaciones normales medidas a lo largo de los ejes x' y y', de la bisectriz OB';

$$\gamma_{x'y'} = 2\epsilon_{OB'} - (\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'}) \tag{7.48}$$

Sustituyendo de las ecuaciones (7.46) y (7.47) en la (7.48), se obtiene

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen} 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{7.49}$$

Las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.49) son las que definen la transformación de deformación plana bajo una rotación de ejes en el plano de deformación. Dividiendo la ecuación (7.49) entre 2, se escribe esta ecuación en la forma alternativa

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \tag{7.49'}$$

y se observa que las ecuaciones (7.44), (7.45) y (7.49′) para la transformación de deformación plana se parecen a las ecuaciones deducidas en la sección 7.2 para la transformación del esfuerzo plano. Aunque las primeras pueden obtenerse de las segundas reemplazando los esfuerzos normales por las correspondientes deformaciones normales, debe notarse sin embargo, que los esfuerzos cortantes τ_{xy} y $\tau_{x'y'}$ deben reemplazarse por la *mitad* de las correspondientes deformaciones cortantes, es decir, por $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ y $\frac{1}{2}\gamma_{x'y'}$, respectivamente.

† Véase la nota de pie de página de la p. 88.

*7.11 CÍRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIÓN PLANA

Como las ecuaciones para la transformación de deformación plana son de la misma forma que las ecuaciones para la transformación de esfuerzo plano, el uso del círculo de Mohr puede extenderse al análisis de deformación plana. Dadas las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} que definen las deformaciones representadas en la figura 7.60, se dibujó un punto $X(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ de abscisa igual a la deformación normal ϵ_x y de ordenada igual a la mitad de la deformación cortante γ_{xy}, y un punto $Y(\epsilon_y, +\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ (figura 7.64). Dibujando el diámetro XY, se define el centro C del círculo de Mohr para deformación plana. La abscisa de C y el radio R del círculo son respectivamente:

$$\epsilon_{prom} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{7.50}$$

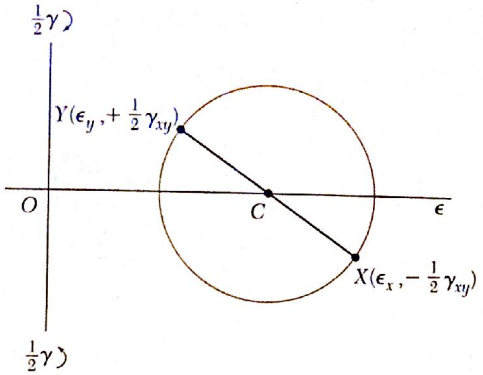


Figura 7.64

Observe que si γ_{xy} es positiva, como se supone en la figura 7.60, los puntos X y Y se trazan, respectivamente, debajo del eje horizontal y encima de éste en la figura 7.64. Pero, en ausencia de cualquier rotación de cuerpo rígido, se observa que el lado del elemento asociado con ϵ_x (figura 7.60) gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras el lado asociado con ϵ_y gira en el sentido de las agujas del reloj. En consecuencia, si la deformación de cortante hace que un lado dado gire en el sentido de las *agujas del reloj*, el punto correspondiente en el círculo de Mohr para deformación plana se dibuja *encima* del eje horizontal y si la deformación hace que el lado gire en *contra de las agujas del reloj*, el punto correspondiente se traza *debajo* del eje horizontal. Note que esta convención está de acuerdo con la usada para dibujar el círculo de Mohr para esfuerzo plano.

Los puntos A y B, en donde el círculo de Mohr interseca el eje horizontal, corresponden a las *deformaciones principales* $\epsilon_{máx}$ y $\epsilon_{mín}$ (figura 7.65*a*). Se encuentra que

$$\epsilon_{máx} = \epsilon_{prom} + R \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{mín} = \epsilon_{prom} - R \tag{7.51}$$

en donde ϵ_{prom} y R se definen en las ecuaciones (7.50). El valor correspondiente θ_p del ángulo θ se obtiene observando que la deformación cortante es cero para A y B. Haciendo $\gamma_{x'y'} = 0$, en la ecuación (7.49),

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \tag{7.52}$$

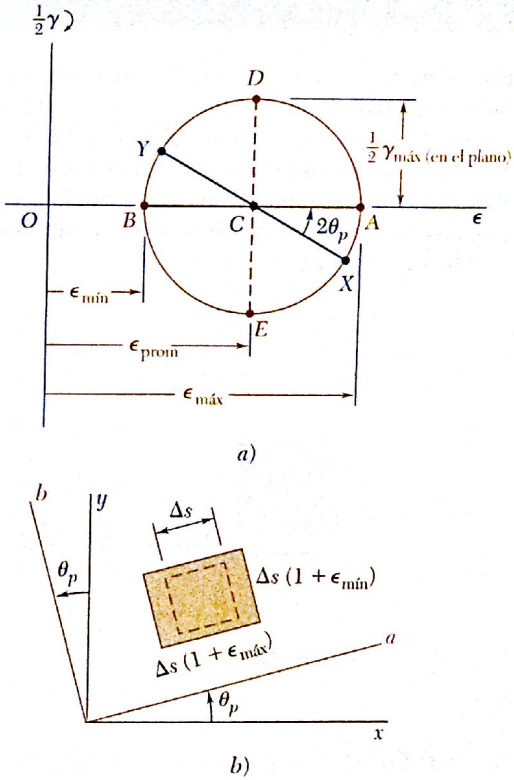


Figura 7.65

Los ejes correspondientes a y b, en la figura 7.65*b*, son los *ejes principales de deformación*. El ángulo θ_p, que define la dirección del eje principal Oa en la figura 7.65*b* correspondiente al punto A en la figura 7.65*a*, es igual a la mitad del ángulo XCA medido en el círculo de Mohr, y la rotación que trae a Ox hacia Oa tiene el mismo sentido de la rotación que hace coincidir el diámetro XY del círculo de Mohr con el diámetro AB.

Recuerde de la sección 2.14 que, en el caso de la deformación elástica de un material homogéneo e isotrópico, la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortantes conduce a $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ para cualquier par de ejes rectangulares x y y. Así, $\gamma_{xy} = 0$ cuando $\tau_{xy} = 0$. Esto indica que los ejes principales de la deformación coinciden con los ejes principales del esfuerzo.

La deformación cortante máxima en el plano se define por los puntos D y E en la figura 7.65*a*. Es igual al diámetro del círculo de Mohr. Recordando la segunda de las ecuaciones (7.50), se escribe

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \tag{7.53}$$

Finalmente, observe que los puntos X' y Y', que definen las componentes de la deformación correspondientes a una rotación de los ejes coordenados un ángulo θ (figura 7.61), pueden obtenerse rotando el diámetro XY del círculo de Mohr, en el mismo sentido, un ángulo 2θ (figura 7.66).

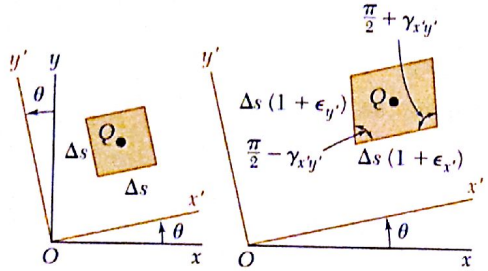


Figura 7.61 (repetida)

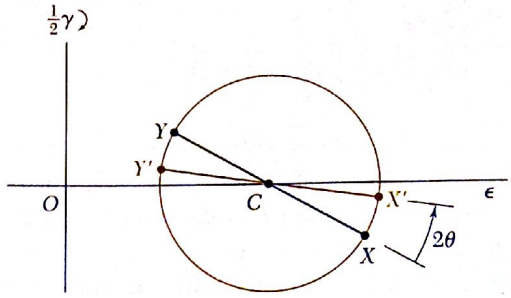


Figura 7.66

EJEMPLO 7.04

En un material en estado de deformación plana se sabe que el lado horizontal de un cuadrado de 10 × 10 mm se alarga 4 μm, mientras el lado vertical permanece constante, y que el ángulo en la esquina izquierda inferior se aumenta en 0.4×10^{-3} rad (figura 7.67). Determine: *a*) los ejes principales y las deformaciones principales, *b*) la deformación cortante máxima y la correspondiente deformación formal.

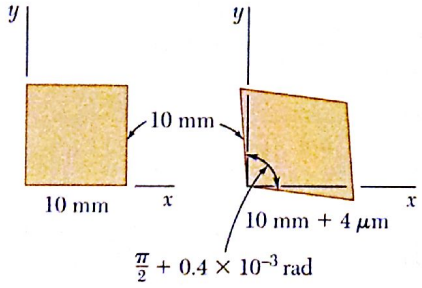


Figura 7.67

a) Esfuerzos y deformaciones principales. Primero se determinan las coordenadas de los puntos X y Y en el círculo de Mohr para deformación. Se tiene

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6}\text{m}}{10 \times 10^{3}\text{m}} = +400\,\mu \qquad \epsilon_y = 0 \qquad \left|\frac{\gamma_{xy}}{2}\right| = 200\,\mu$$

Como el lado del cuadrado asociado con ϵ_x gira en el *sentido de las agujas del reloj*, el punto X de coordenadas ϵ_x y $|\gamma_{xy}/2|$ se traza *encima* del eje horizontal. Como $\epsilon_y = 0$ y el lado correspondiente gira en *sentido a las agujas del reloj*, el punto Y se traza directamente *debajo* del origen (véase figura 7.68). Dibujando el diámetro XY, se determina el centro C del círculo de Mohr y su radio R. Se tiene

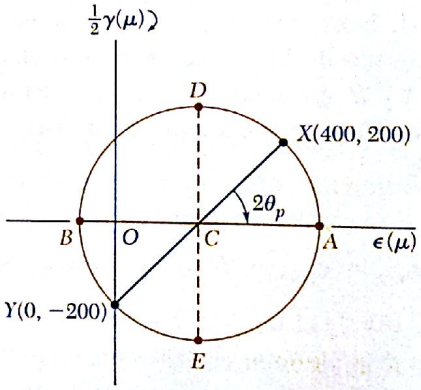


Figura 7.68

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200\,\mu \qquad OY = 200\,\mu$$

$$R = \sqrt{(OC)^2 + (OY)^2} = \sqrt{(200\,\mu)^2 + (200\,\mu)^2} = 283\,\mu$$

Las deformaciones principales se definen por las abscisas de los puntos A y B. Se escribe

$$\epsilon_a = OA = OC + R = 200\,\mu + 283\,\mu = 483\,\mu$$
$$\epsilon_b = OB = OC - R = 200\,\mu - 283\,\mu = -83\,\mu$$

En la figura 7.69 se muestran los ejes principales Oa y Ob. Como $OC = OY$, el ángulo en C del triángulo OCY es 45°. Así, el ángulo $2\theta_p$ que trae a XY hacia AB es 45°↓ y el ángulo θ_p que lleva Ox hasta Oa es 22.5°↓.

b) Deformación cortante máxima. Los puntos D y E definen la deformación cortante máxima en el plano que, como las deformaciones principales tienen signos opuestos, es también la máxima deformación por cortante (véase sección 7.12). Se tiene

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = R = 283\ \mu \qquad \gamma_{\text{máx}} = 566\ \mu$$

Las correspondientes deformaciones normales son ambas iguales a

$$\epsilon' = OC = 200\ \mu$$

En la figura 7.70 se muestran los ejes de deformación cortante máxima.

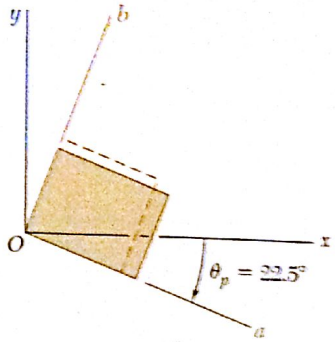


Figura 7.69

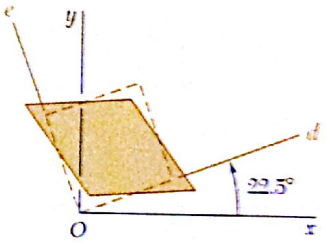


Figura 7.70

*7.12 ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE LA DEFORMACIÓN

En la sección 7.5 se estudió que, en el caso más general del esfuerzo, pueden determinarse tres ejes coordenados a, b y c, llamados ejes principales de esfuerzo. Un pequeño elemento cúbico, con caras respectivamente perpendiculares a estos ejes, está libre de esfuerzo cortante (figura 7.27); es decir, se tiene $\tau_{ab} = \tau_{bc} = \tau_{ca} = 0$. Como se recordó en la sección precedente, la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortante se aplica cuando la deformación es elástica y el material homogéneo e isotrópico. Se sigue que, en tal caso, $\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{ca} = 0$, es decir, los ejes a, b y c son también *ejes principales de deformación*. Un pequeño cubo de lado unitario, centrado en Q y con caras respectivamente perpendiculares a los ejes principales, se transforma en un paralelepípedo rectangular de lados $1 + \epsilon_a$, $1 + \epsilon_b$ y $1 + \epsilon_c$ (figura 7.71).

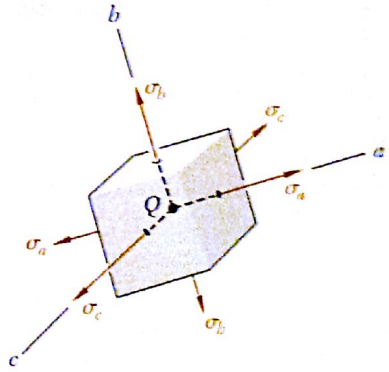


Figura 7.27 (repetida)

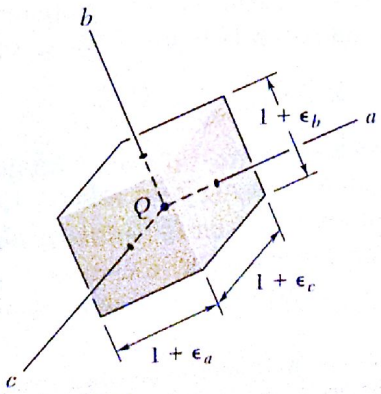


Figura 7.71

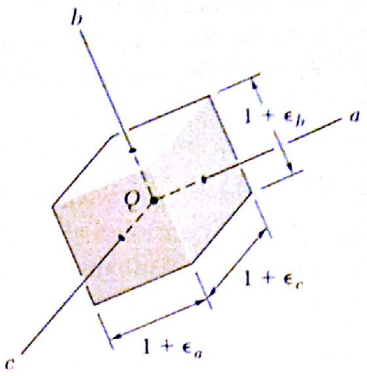


Figura 7.71 (repetida)

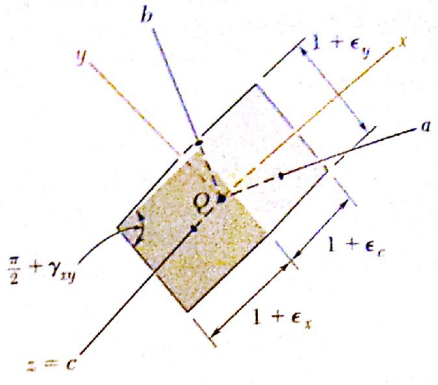


Figura 7.72

Si el elemento de la figura 7.71 se gira alrededor de uno de los ejes principales en Q, por ejemplo el eje c (figura 7.72), el método de análisis desarrollado antes para la transformación de deformación plana puede usarse para determinar las componentes de la deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} asociadas con las caras perpendiculares al eje c, ya que la derivación en este método no implicaba ninguna de las otras componentes de la deformación.† Puede dibujarse entonces el círculo de Mohr por los puntos A y B, correspondientes a los ejes principales a y b (figura 7.73). Análogamente, los círculos de diámetros BC y CA pueden usarse para analizar las transformaciones de la deformación cuando se rota el elemento alrededor de los ejes a y b, respectivamente.

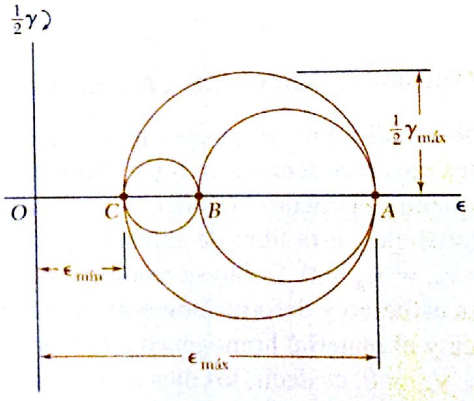


Figura 7.73

El análisis tridimensional de la deformación por medio del círculo de Mohr se limita aquí a rotaciones alrededor de los ejes principales (como el caso para el análisis de esfuerzo) y se usa para hallar la deformación cortante máxima $\gamma_{máx}$ en el punto Q. Puesto que $\gamma_{máx}$ es igual al diámetro del mayor de los tres círculos mostrados en la figura 7.73, se tiene

$$\gamma_{máx} = |\epsilon_{máx} - \epsilon_{mín}| \tag{7.54}$$

en donde $\epsilon_{máx}$ y $\epsilon_{mín}$ representan los valores *algebraicos* de las deformaciones máxima y mínima en el punto Q.

Retornando al caso particular de la *deformación plana* y eligiendo los ejes x y y en el plano de deformación, se tiene $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. En consecuencia, el eje z es uno de los tres ejes principales en Q, y el punto corres-

† Note que las otras cuatro caras del elemento permanecen rectangulares y que los bordes paralelos del eje c se mantienen iguales.

pondiente, en el diagrama del círculo de Mohr, es el origen O, donde $\epsilon = \gamma = 0$. Si los puntos A y B que definen los ejes principales en el plano de deformación caen en lados opuestos de O (figura 7.74*a*), las deformaciones principales correspondientes representan las deformaciones máxima y mínima en el punto Q, y la deformación cortante máxima es igual a la deformación cortante máxima en el plano correspondiente a los puntos D y E. Si, por otra parte, A y B están en el mismo lado de O (figura 7.74*b*), esto es, si ϵ_a y ϵ_b tienen igual signo, entonces la deformación cortante máxima se define por los puntos D' y E' en el círculo de diámetro OA, y se tiene $\gamma_{máx} = \epsilon_{máx}$.

Considere ahora el caso particular de *esfuerzo plano* encontrado en una placa delgada o en la superficie libre de un elemento estructural o componente de máquina (véase sección 7.1). Eligiendo los ejes x y y en el plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ y se verifica que el eje z es un eje principal de esfuerzo. Como se estudió antes, si la deformación es elástica y si el material es homogéneo e isotrópico, se sigue de la ley de Hooke que $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; así, el eje z es también un eje principal de deformación y puede usarse el círculo de Mohr para estudiar la transformación de deformación en el plano xy. Sin embargo, como se verá, *no* se sigue de la ley de Hooke que $\epsilon_z = 0$; ciertamente, un estado de esfuerzo plano, en general, no resulta de un estado de deformación plana.†

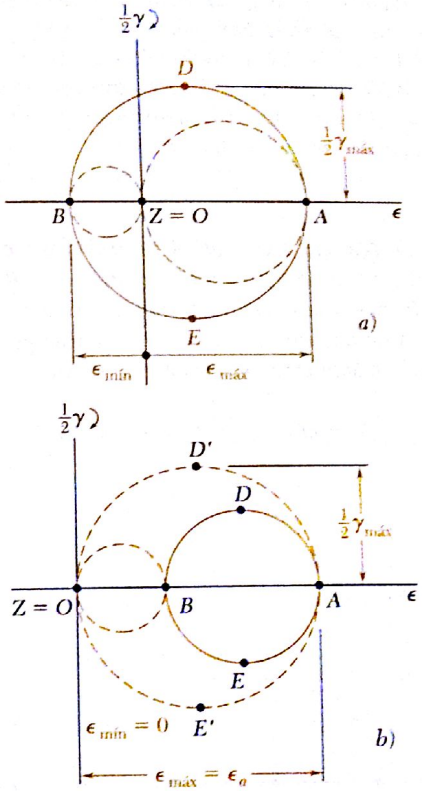


Figura 7.74

Designando con a y b los ejes principales dentro del plano de esfuerzo y con c el eje principal perpendicular a ese plano se tiene, $\sigma_x = \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_b$ y $\sigma_z = 0$ en las ecuaciones (2.28) de la ley general de Hooke (véase sección 2.12) y se escribe

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \tag{7.55}$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \tag{7.56}$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.57}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (7.55) y (7.56)

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1 - \nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.58}$$

Resolviendo la ecuación (7.58) para $\sigma_a + \sigma_b$ y sustituyendo en la ecuación (7.57), se escribe

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \tag{7.59}$$

La relación así obtenida define la tercera deformación principal en términos de las deformaciones principales en el plano. Note que si B está entre A y C en el diagrama de Mohr (figura 7.75), la deformación cortante máxima es igual al diámetro CA del círculo correspondiente a una rotación con respecto al eje b, fuera del plano de esfuerzo.

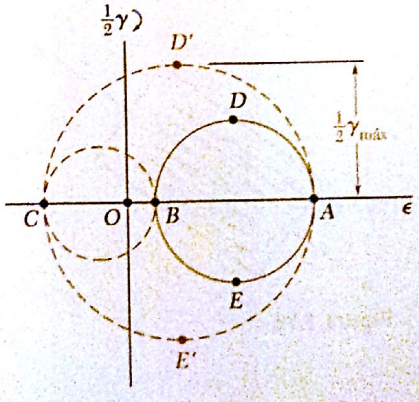


Figura 7.75

† Véase la nota en la p. 470.

EJEMPLO 7.05

Como resultado de medidas hechas en la superficie de una componente de máquina con galgas extensiométricas orientadas de varias maneras, se ha establecido que las deformaciones principales en la superficie libre son $\epsilon_a = +400 \times 10^{-6}$ in./in. y $\epsilon_b = -50 \times 10^{-6}$ in./in. Si el módulo de Poisson para el matricial dado es $\nu = 0.30$, determine, *a*) la deformación cortante máxima en el plano, *b*) el valor real de la deformación cortante máxima cerca de la superficie de la componente.

a) Deformación cortante máxima en el plano. Se dibuja el círculo de Mohr por los puntos A y B que corresponden a las deformaciones principales dadas (figura 7.76). La deformación cortante máxima en el plano se define por los puntos D y E y es igual al diámetro del círculo de Mohr.

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 400 \times 10^{-6} + 50 \times 10^{-6} = 450 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

b) Deformación cortante máxima. Primero se determina la tercera deformación principal ϵ_c. Como hay un estado de esfuerzo plano en la superficie de la componente de máquina, se usa la ecuación (7.59) y se escribe

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b)$$

$$= -\frac{0.30}{0.70}(400 \times 10^{-6} - 50 \times 10^{-6}) = -150 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Dibujando los círculos de Mohr por A y C y por B y C (figura 7.77), se halla que la deformación cortante máxima es igual al diámetro del círculo de diámetro CA.

$$\gamma_{\text{máx}} = 400 \times 10^{-6} + 150 \times 10^{-6} = 550 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Se nota que, aunque ϵ_a y ϵ_b tienen signos opuestos, la deformación cortante máxima en el plano no representa la verdadera deformación cortante máxima.

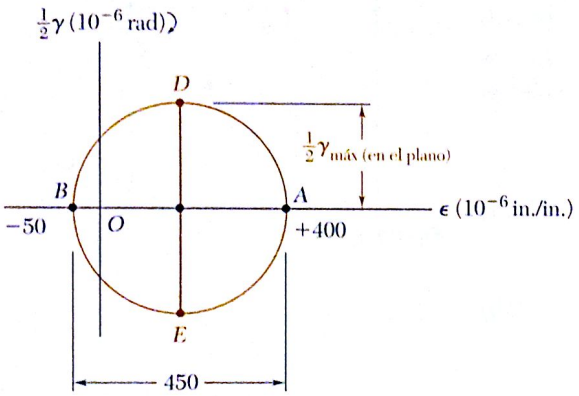


Figura 7.76

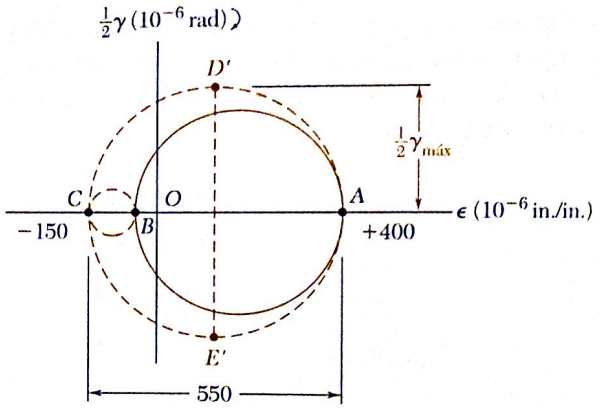


Figura 7.77

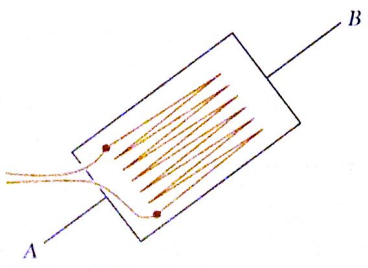


Figura 7.78

*7.13 MEDICIONES DE LA DEFORMACIÓN. ROSETA DE DEFORMACIÓN

La deformación normal puede determinarse en cualquier dirección en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina haciendo dos marcas A y B a través de una línea dibujada en la dirección deseada, y midiendo la longitud del segmento AB antes y después de aplicar la carga. Si L es la longitud no deformada de AB y δ su alargamiento, la deformación normal a lo largo de AB es $\epsilon_{AB} = \delta/L$.

Un método más conveniente y exacto para la medida de deformaciones normales se basa en los deformímetros eléctricos conocidos como galgas extensiométricas. Una galga extensiométrica común consta de una longitud de alambre delgado, dispuesto como en la figura 7.78, adherido a dos piezas de papel. Para medir la deformación ϵ_{AB} de un material dado en la dirección AB, la galga extensiométrica se pega a la superficie del material con las vueltas de alambre paralelas a AB. Cuando el material se alarga, el alambre aumenta en longitud y disminuye en diámetro, provocando que la resistencia eléctrica de la galga extensiométrica aumente. Midiendo la corriente que pasa por una

galga extensiométrica bien calibrada, es posible determinar la deformación ϵ_{AB} de manera precisa y continua en la medida en que la carga aumenta.

Las componentes de deformación ϵ_x y ϵ_y pueden determinarse en un punto dado de la superficie libre del material simplemente midiendo la deformación normal a lo largo de los ejes x y y trazados por ese punto. Recordando la ecuación (7.43) de la sección 7.10, se nota que una tercera medida de deformación normal, realizada a lo largo de la bisectriz OB del ángulo formado por los ejes x y y permite determinar también la deformación cortante γ_{xy} (figura 7.79):

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \tag{7.43}$$

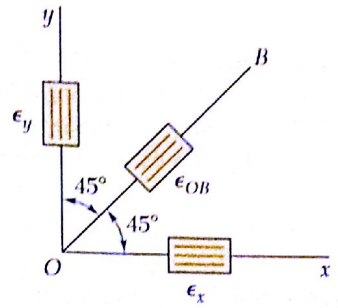


Figura 7.79

Debe advertirse que las componentes ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} en un punto dado pueden obtenerse de la medida de deformación normal hecha a lo largo de *tres líneas* dibujadas por ese punto (figura 7.80). Designando respectivamente por θ_1, θ_2 y θ_3 el ángulo que cada una de las líneas forma con el eje x, por ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 las medidas de las deformaciones correspondientes y, reemplazando en la ecuación (7.41), se tienen las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \\
\epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \\
\epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3
\end{aligned} \tag{7.60}$$

que deben resolverse simultáneamente para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}.[†]

La colocación de las galgas extensiométricas utilizadas para medir las tres deformaciones normales ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 se conoce como *roseta de deformación*. La roseta usada para medir deformaciones normales a lo largo de los ejes x y y y su bisector se conoce como roseta de 45°. Otra roseta muy usada es la de 60° (véase el problema modelo 7.7).

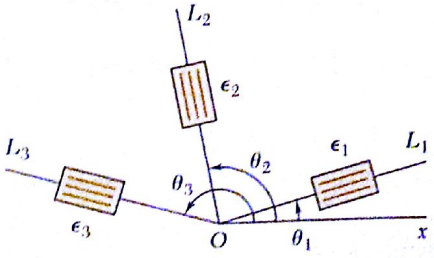
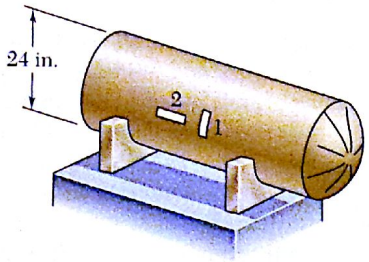


Figura 7.80

[†] Debe notarse que la superficie libre en la cual se hacen las medidas de deformación está en un estado de *esfuerzo plano*, mientras que las ecuaciones (7.41) y (7.43) se dedujeron para un estado de *deformación plana*. Sin embargo, como se observó antes, la normal a la superficie libre es un eje principal de deformación y las deducciones de la sección 7.10 permanecen válidas.

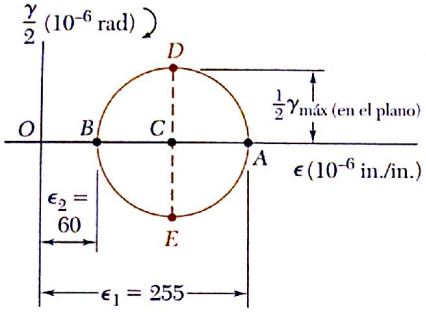


PROBLEMA MODELO 7.6

Un tanque de almacenamiento utilizado para el transporte de gas a presión tiene un diámetro interior de 24 in. y un espesor de $\frac{3}{4}$ in. Varios deformímetros adheridos a la superficie del tanque en dirección transversal y longitudinal indican deformaciones de 255×10^{-6} y 60×10^{-6} in./in., respectivamente. Sabiendo que una prueba de torsión mostró que el módulo de rigidez del material usado en el tanque es $G = 11.2 \times 10^{6}$ psi, determine: *a*) la presión manométrica en el interior del tanque, *b*) los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en la pared del tanque.

SOLUCIÓN

***a*) Presión manométrica en el interior del tanque.** Note que las deformaciones dadas son las deformaciones principales en la superficie del tanque. Trazando los puntos correspondientes A y B, se dibuja el círculo de Mohr para deformación. La deformación cortante máxima en el plano es igual al diámetro del círculo.



$$\gamma_{máx\ (en\ el\ plano)} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255 \times 10^{-6} - 60 \times 10^{-6} = 195 \times 10^{-6}\ \text{rad}$$

De la ley de Hooke para esfuerzo y deformación cortante, se tiene

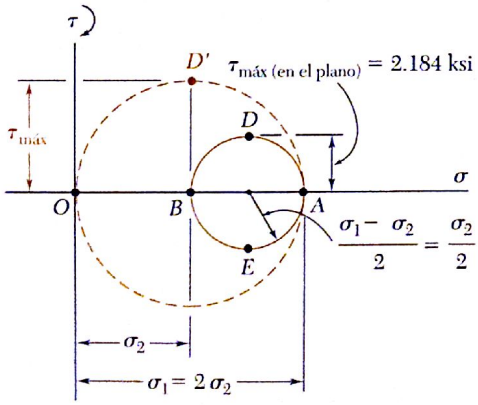
$$\begin{aligned}\tau_{máx\ (en\ el\ plano)} &= G\gamma_{máx\ (en\ el\ plano)}\\ &= (11.2 \times 10^{6}\ \text{psi})(195 \times 10^{-6}\ \text{rad})\\ &= 2\,184\ \text{psi} = 2.184\ \text{ksi}\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor y los datos dados en la ecuación (7.33), se escribe

$$\tau_{máx\ (en\ el\ plano)} = \frac{pr}{4t} \qquad 2\,184\ \text{psi} = \frac{p(12\ \text{in.})}{4(0.75\ \text{in.})}$$

Resolviendo para la presión manométrica p, se tiene

$$p = 546\ \text{psi} \blacktriangleleft$$

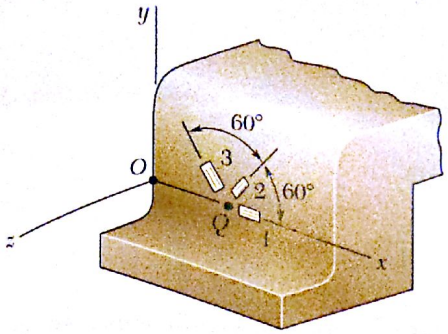


***b*) Esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo.** Recordando que para un recipiente cilíndrico de pared delgada $\sigma_1 = 2\sigma_2$, se dibuja el círculo de Mohr para esfuerzo y se obtiene

$$\sigma_2 = 2\tau_{máx\ (en\ el\ plano)} = 2(2.184\ \text{ksi}) = 4.368\ \text{ksi} \qquad \sigma_2 = 4.37\ \text{ksi} \blacktriangleleft$$
$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2(4.368\ \text{ksi}) \qquad \sigma_1 = 8.74\ \text{ksi} \blacktriangleleft$$

El esfuerzo cortante máximo es igual al radio del círculo de diámetro OA y corresponde a una rotación de 45° con respecto al eje longitudinal.

$$\tau_{máx} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \sigma_2 = 4.368\ \text{ksi} \qquad \tau_{máx} = 4.37\ \text{ksi} \blacktriangleleft$$

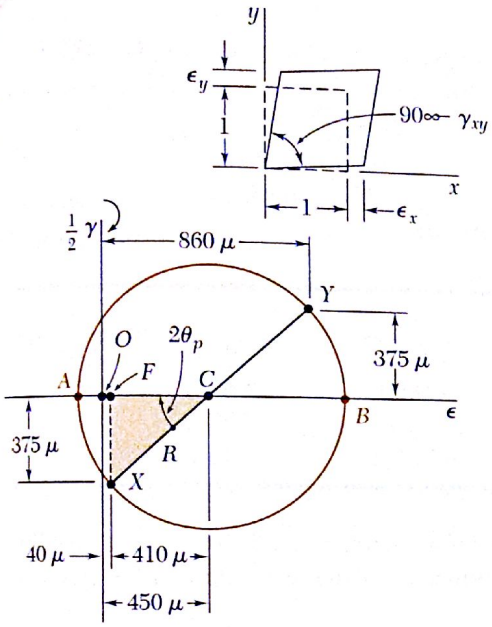


PROBLEMA MODELO 7.7

Usando una roseta de 60° se han determinado las siguientes deformaciones en el punto Q sobre la superficie de una base de máquina de acero.

$$\epsilon_1 = 40\,\mu \qquad \epsilon_2 = 980\,\mu \qquad \epsilon_3 = 330\,\mu$$

Usando los ejes coordenados mostrados, determine en el punto Q, *a*) las componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, *b*) las deformaciones principales, *c*) la deformación cortante máxima. (Considere $\nu = 0.29$.)



SOLUCIÓN

***a*) Componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}.** Para los ejes mostrados

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 60° \qquad \theta_3 = 120°$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (7.60),

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) &&+ \epsilon_y(0) &&+ \gamma_{xy}(0)(1)\\
\epsilon_2 &= \epsilon_x(0.500)^2 &&+ \epsilon_y(0.866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0.866)(0.500)\\
\epsilon_3 &= \epsilon_x(-0.500)^2 &&+ \epsilon_y(0.866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0.866)(-0.500)
\end{aligned}$$

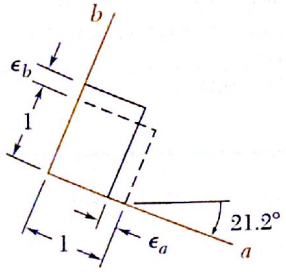
Resolviendo estas ecuaciones para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy},

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0.866}$$

Sustituyendo los valores de ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3, se tiene

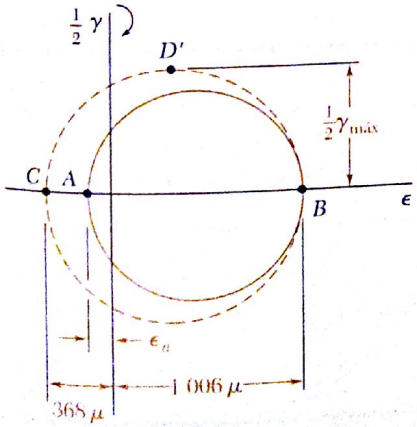
$$\epsilon_x = 40\,\mu \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] \qquad \epsilon_y = +860\,\mu \blacktriangleleft$$
$$\gamma_{xy} = (980 - 330)/0.866 \qquad \gamma_{xy} = 750\,\mu \blacktriangleleft$$

Estas deformaciones se indican en el elemento mostrado.



***b*) Deformaciones principales.** Observe que el lado del elemento asociado con ϵ_x gira en sentido contrario a las agujas del reloj, en consecuencia, se traza el punto X debajo del eje horizontal, es decir, $X(40, -375)$. Luego se sitúa $Y(860, +375)$ y se dibuja el círculo de Mohr.

$$\epsilon_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}(860\,\mu + 40\,\mu) = 450\,\mu$$
$$R = \sqrt{(375\,\mu)^2 + (410\,\mu)^2} = 556\,\mu$$
$$\tan 2\theta_p = \frac{375\,\mu}{410\,\mu} \qquad 2\theta_p = 42.4°\downarrow \qquad \theta_p = 21.2°\downarrow$$



Los puntos A y B corresponden a las deformaciones principales. Se tiene

$$\epsilon_a = \epsilon_{\text{prom}} - R = 450\,\mu - 556\,\mu \qquad \epsilon_a = -106\,\mu \blacktriangleleft$$
$$\epsilon_b = \epsilon_{\text{prom}} + R = 450\,\mu + 556\,\mu \qquad \epsilon_b = +1\,006\,\mu \blacktriangleleft$$

Como $\sigma_z = 0$ en la superficie, puede usarse la ecuación (7.59) para obtener la deformación principal ϵ_c:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0.29}{1 - 0.29}(-106\,\mu + 1\,006\,\mu) \qquad \epsilon_c = -368\,\mu \blacktriangleleft$$

***c*) Deformación cortante máxima.** Dibujando el punto C y trazando el círculo de Mohr por los puntos B y C se obtiene el punto D' y se escribe

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(1\,006\,\mu + 368\,\mu) \qquad \gamma_{\text{máx}} = 1\,374\,\mu \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

7.128 a 7.131 Para el estado de deformación plana dado, utilice los métodos de la sección 7.10 para determinar el estado de deformación asociado con los ejes x' y y' rotados al ángulo θ dado.

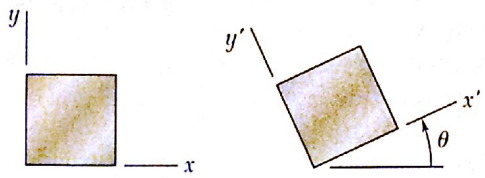


Figura P7.128 a P7.135

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
7.128 y 7.132	-240μ	$+320\mu$	-330μ	65° ↰
7.129 y 7.133	$+240\mu$	$+160\mu$	$+150\mu$	60° ↲
7.130 y *7.134*	$+350\mu$	0	$+120\mu$	15° ↲
7.131 y 7.135	0	$+320\mu$	-100μ	30° ↰

7.132 a 7.135 Para el estado de deformación plana dado, utilice el círculo de Mohr para determinar el estado de deformación plana asociado con los ejes x' y y' rotados al ángulo θ dado.

7.136 a 7.139 El siguiente estado de deformación plana se midió sobre la superficie de una placa delgada. Si se sabe que la superficie de la placa está libre de tensión, determine *a*) la dirección y magnitud de las deformaciones principales, *b*) la deformación cortante máxima en el plano, *c*) la deformación cortante máxima. (Use $\nu = \frac{1}{3}$.)

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.136	$+30\mu$	$+570\mu$	$+720\mu$
7.137	$+160\mu$	-480μ	-600μ
7.138	-600μ	-400μ	$+350\mu$
7.139	-260μ	-60μ	$+480\mu$

7.140 a 7.143 Para el estado de deformación plana dado, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación y magnitud de las deformaciones, *b*) la deformación máxima en el plano, *c*) la deformación cortante máxima.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
7.140	$+400\mu$	$+200\mu$	$+375\mu$
7.141	-180μ	-260μ	$+315\mu$
7.142	$+60\mu$	$+240\mu$	-50μ
7.143	$+300\mu$	$+60\mu$	$+100\mu$

7.144 Determine la deformación ϵ_x si se han determinado las siguientes deformaciones con el uso de la roseta que se muestra en la figura:

$$\epsilon_1 = +480\mu \qquad \epsilon_2 = -120\mu \qquad \epsilon_3 = +80\mu$$

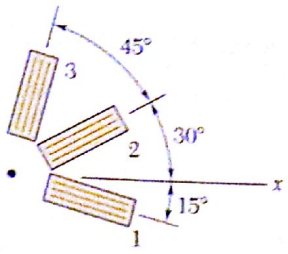


Figura *P7.144*

7.145 Durante la prueba de un elemento de máquina, las deformaciones determinadas mediante el uso de la roseta que se muestra en la figura son

$$\epsilon_1 = +600\mu \qquad \epsilon_2 = +450\mu \qquad \epsilon_3 = -75\mu$$

Determine *a)* las deformaciones principales en el plano, *b)* la deformación cortante máxima en el plano.

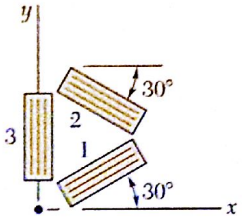


Figura *P7.145*

7.146 La roseta que se muestra en la figura se utilizó para determinar las siguientes deformaciones, en la superficie del gancho de una grúa:

$$\epsilon_1 = +420 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = -45 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_4 = +165 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

a) ¿Cuál sería la lectura del medidor 3? *b)* Determine las deformaciones principales y la deformación cortante máxima en el plano.

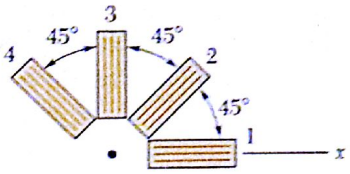


Figura P7.146

7.147 Durante la prueba de un elemento de máquina las deformaciones determinadas, mediante el uso de la roseta que se muestra en la figura, son

$$\epsilon_1 = -93.1 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +385 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +210 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Determine *a)* la orientación y magnitud de las deformaciones principales en el plano de la roseta, *b)* el esfuerzo cortante máximo en el plano.

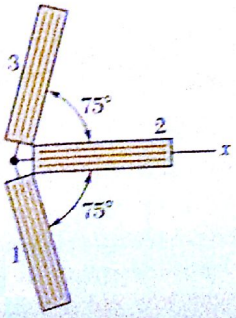


Figura P7.147

7.148 Demuestre que la suma de las tres mediciones de las deformaciones, realizadas con una roseta de 60°, es independiente de la orientación de la roseta e igual a

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_{prom}$$

donde ϵ_{prom} es la abscisa del centro del círculo de Mohr correspondiente para la deformación.

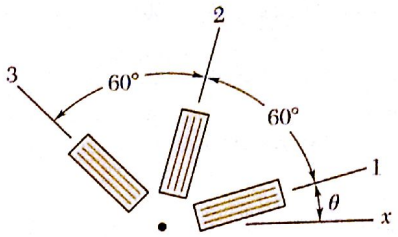


Figura P7.148

7.149 Con una roseta de 45° se determinaron las deformaciones ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 en un punto dado. Con el uso del círculo de Mohr demuestre que las deformaciones principales son:

$$\epsilon_{máx,\,mín} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_3) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

(*Sugerencia*: Considere que los triángulos sombreados son congruentes.)

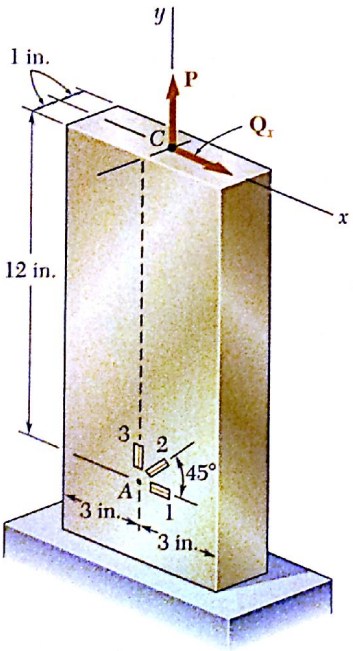


Figura P7.150

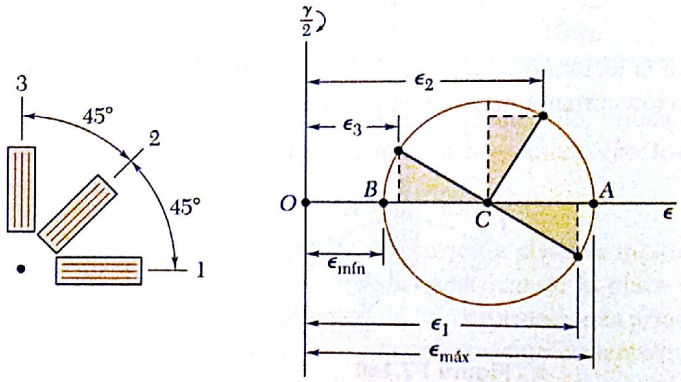


Figura P7.149

7.150 Una fuerza axial céntrica **P** y una fuerza horizontal $\mathbf{Q}_x$ se aplican en el punto *C* de la barra rectangular que se muestra en la figura. Una roseta de deformación de 45° sobre la superficie de la barra en el punto *A* indica las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -60 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +240 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +200 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine las magnitudes de **P** y $\mathbf{Q}_x$.

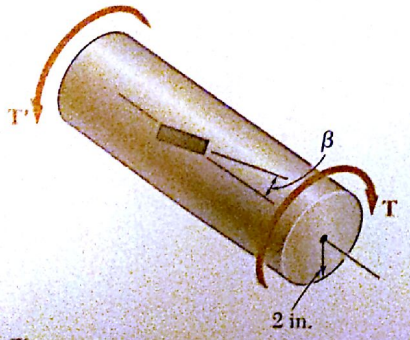


Figura P7.152

7.151 Retome el problema 7.150, y ahora suponga que la roseta en el punto *A* indica las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -30 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +250 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +100 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

7.152 Una sola galga extensiométrica está cementada a una barra de acero sólido con 4 in. de diámetro y forma un ángulo $\beta = 25°$ con una línea paralela al eje de la barra. Si se sabe que $G = 11.5 \times 10^6$ psi, determine el par de torsión **T** correspondiente a una lectura del medidor de 300×10^{-6} in./in.

7.153 Retome el problema 7.152, y ahora suponga que la galga extensiométrica forma un ángulo $\beta = 35°$ con una línea paralela al eje de la barra.

7.154 Una sola galga extensiométrica que forma un ángulo $\beta = 18°$ con un plano horizontal se utiliza para determinar la presión manométrica en el tanque cilíndrico que se muestra en la figura. El espesor de pared del tanque es de 6 mm y su diámetro interior de 600 mm; está hecho de acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$. Determine la presión en el tanque, indicada por una lectura de 280μ en la galga extensiométrica.

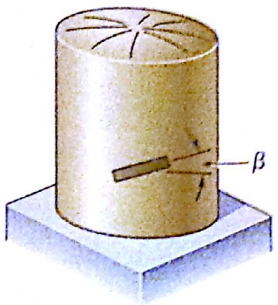


Figura P7.154

7.155 Retome el problema 7.154, y ahora suponga que la galga extensiométrica forma un ángulo $\beta = 35°$ con un plano horizontal.

7.156 Se sabe que el estado de esfuerzo plano dado existe en la superficie de un componente de máquina. Si $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa, encuentre la dirección y magnitud de las tres deformaciones principales *a)* para ello determine el estado correspondiente de deformación [utilice las ecuaciones (2.43) y (2.38)] y después use el círculo de Mohr para deformación, *b)* emplee el círculo de Mohr de esfuerzos para determinar los planos y esfuerzos principales y luego encuentre las deformaciones correspondientes.

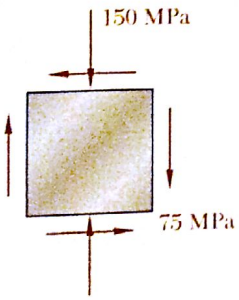


Figura P7.156

7.157 El siguiente estado de deformación se encontró en la superficie de un elemento de máquina hecho de hierro fundido:

$$\epsilon_x = -720\mu \qquad \epsilon_y = -400\mu \qquad \gamma_{xy} = +660\mu$$

Si se sabe que $E = 69$ GPa y $G = 28$ GPa, encuentre los planos y esfuerzos principales *a)* mediante la determinación del correspondiente estado de esfuerzo plano [utilice las ecuaciones (2.36) y (2.43) y las primeras dos ecuaciones del problema 2.73] y después utilice el círculo de Mohr para esfuerzos, *b)* por medio del círculo de Mohr para deformación determine la orientación y la magnitud de las deformaciones principales y después determine los esfuerzos correspondientes.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 7

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio de la *transformación de esfuerzos* bajo una rotación de ejes y su aplicación a la solución de problemas de ingeniería, y la segunda parte a un estudio similar de la *transformación de deformación*.

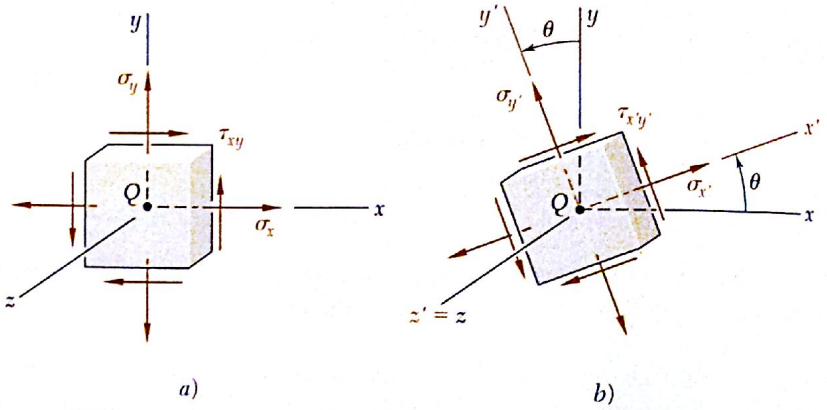


Figura 7.5

Transformación de esfuerzo plano

Considerando primero un estado de *esfuerzo plano* en un punto dado Q [véase sección 7.2] y llamando σ_x, σ_y y τ_{xy} las componentes del esfuerzo asociadas con el elemento de la figura 7.5*a*, se obtuvieron las siguientes ecuaciones para las componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con ese elemento después de rotarlo un ángulo θ con respecto al eje z (figura 7.5*b*).

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.5)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.7)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (7.6)$$

En la sección 7.3 se determinaron los valores θ_p del ángulo de rotación que corresponden a los valores máximo y mínimo del esfuerzo normal en el punto Q. Se escribió

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (7.12)$$

Los dos valores obtenidos por θ_p difieren en 90° (figura 7.11) y definen los *planos principales de esfuerzo* en el punto Q. Los valores correspon-

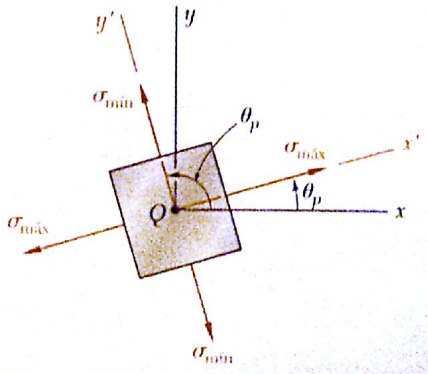


Figura 7.11

dientes del esfuerzo normal son los *esfuerzos principales* en Q; se obtuvo:

$$\sigma_{\text{máx, mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (7.14)$$

Planos principales. Esfuerzos principales

También se observó que el valor correspondiente del esfuerzo cortante es cero. Después, se calcularon los valores θ_s del ángulo θ para el cual ocurre el valor máximo del esfuerzo cortante. Se escribió

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (7.15)$$

Los dos valores obtenidos para θ_s difieren en 90° (figura 7.12). También se observó que los planos de esfuerzo cortante máximo están a 45° de los planos principales. El valor máximo del esfuerzo cortante para una rotación *en el plano de esfuerzo* es

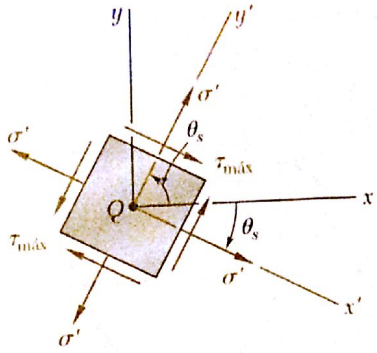


Figura 7.12

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (7.16)$$

Planos de máximo esfuerzo cortante

y el valor correspondiente del esfuerzo normal es

$$\sigma' = \sigma_{\text{prom}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (7.17)$$

En la sección 7.4 se estudió que el *círculo de Mohr* proporciona un método alternativo, basado en consideraciones geométricas simples, para

Círculo de Mohr para el esfuerzo

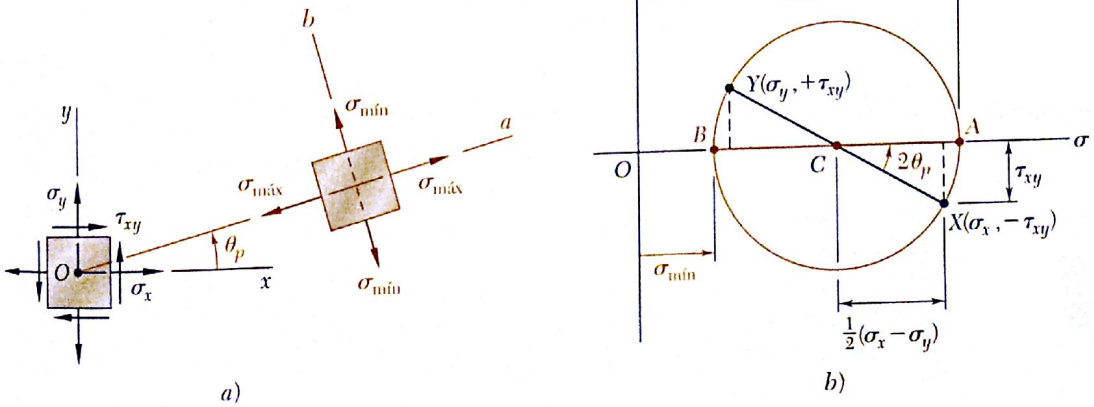


Figura 7.17

el análisis de la transformación del esfuerzo plano. Dado el estado de esfuerzo mostrado en negro en la figura 7.17*a*, se dibuja el punto X de coordenadas $\sigma_x, -\tau_{xy}$ y el punto Y de coordenadas $\sigma_y, +\tau_{xy}$ (figura 7.17*b*). Dibujando el círculo de diámetro XY, se obtiene el círculo de Mohr. Las abscisas de los puntos de intersección A y B del círculo con el eje horizontal representan los esfuerzos principales, y el ángulo de rotación que trae el diámetro XY hasta AB es el doble del ángulo θ_p que define los planos principales en la figura 7.17*a*, con los dos ángulos en el mismo sentido. También se notó que el diámetro DE define el esfuerzo cortante máximo y la orientación del plano respectivo. (Véase las figuras 7.19*b*, el ejemplo 7.02 y los problemas modelo 7.2 y 7.3.)

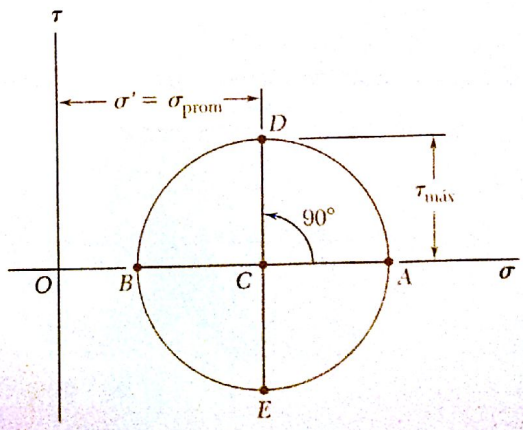


Figura 7.19*b*

Estado general de esfuerzo

Considerando un *estado general de esfuerzo* caracterizado por seis componentes del esfuerzo [sección 7.5], se demostró que el esfuerzo normal en un plano de orientación arbitraria puede expresarse como una forma cuadrática de los cosenos directores de la normal a ese plano. Esto prueba la existencia de *tres ejes principales de esfuerzo* y *tres esfuerzos principales* en cualquier punto dado. Girando un pequeño elemento cúbico con respecto a cada uno de los tres ejes principales [sección 7.6], se dibujaron los correspondientes círculos de Mohr que generan los valores de $\sigma_{máx}$, $\sigma_{mín}$ y $\tau_{máx}$ (figura 7.29). En el caso particular de *esfuerzo plano*, si los ejes x y y se eligen en el plano de esfuerzo, el punto C coincide con el origen O. Si A y B están en lados opuestos de O, el esfuerzo cortante máximo es igual al esfuerzo cortante máximo "en el plano" como se determinó en las secciones 7.3 y 7.4. Si A y B están situados en el mismo lado de O, éste no será el caso. Si $\sigma_a > \sigma_b > 0$, por ejemplo, el esfuerzo cortante máximo es igual a $\frac{1}{2}\sigma_a$ y corresponde a una rotación fuera del plano de esfuerzo (figura 7.32).

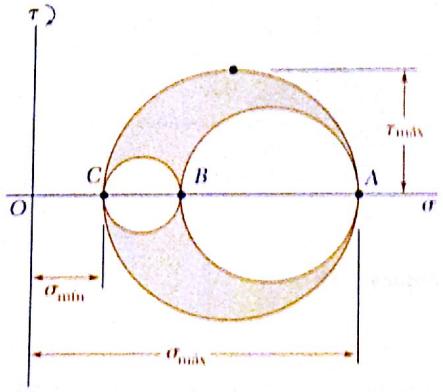


Figura 7.29

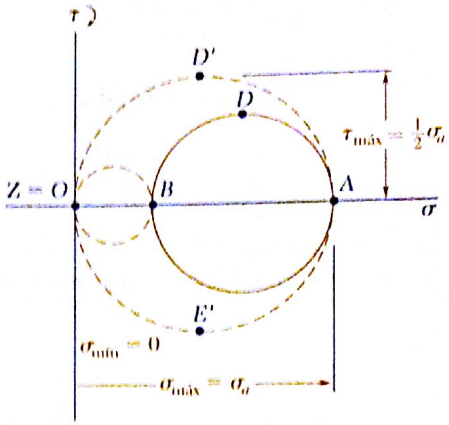


Figura 7.32

Criterios de cedencia para materiales dúctiles

Los *criterios de cedencia* para materiales dúctiles bajo esfuerzo plano se desarrollaron en la sección 7.7. Para predecir si un componente estructural o de máquina fallará en algún punto crítico debido a la cedencia del material, primero se determinan los esfuerzos principales σ_a y σ_b en ese punto para las condiciones de carga dadas. Después se dibuja el punto de coordenadas σ_a y σ_b. Si este punto cae dentro de cierta área, el componente es seguro; si cae fuera, el componente fallará. En la figura 7.40 se indica el área usada con el *criterio del esfuerzo cortante máximo* y el área usada con el *criterio de la energía de distorsión máxima*, en la figura 7.41. Observe que ambas áreas dependen del límite de cedencia σ_Y del material.

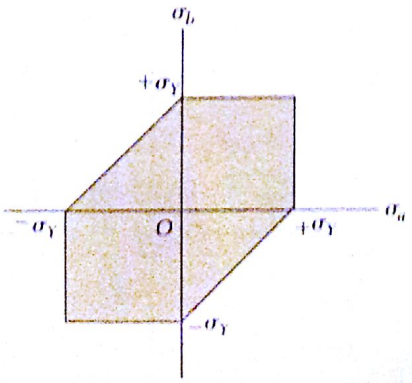


Figura 7.40

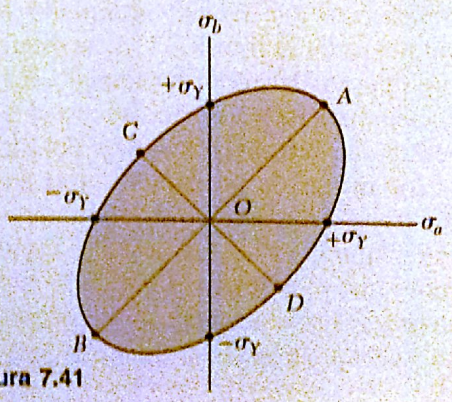


Figura 7.41

Los *criterios de ruptura* para materiales frágiles sometidos a esfuerzo plano se explicaron en la sección 7.8 en forma similar. El más común es el *criterio de Mohr* que utiliza los resultados de varios tipos de pruebas disponibles para un material dado. El área sombreada de la figura 7.47*b* es utilizada cuando se han determinado las resistencias últimas σ_{UT} y σ_{UC}

Criterios de ruptura para materiales frágiles

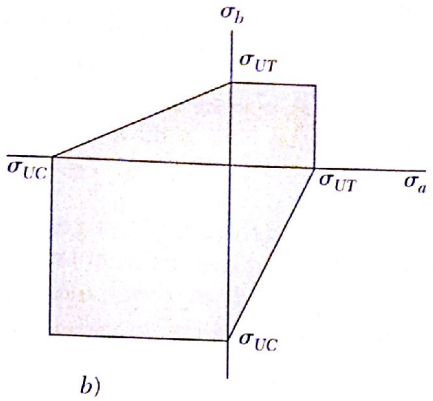


Figura 7.47*b*

a partir de una prueba de tensión y una de compresión. De nuevo, los esfuerzos principales σ_a y σ_b se calculan en un punto dado de un componente estructural o de máquina que se está investigando. Si el punto correspondiente cae dentro del área sombreada, la componente es seguro; si cae fuera, la componente fallará.

En la sección 7.9 se consideraron los esfuerzos en recipientes de *presión de pared delgada* y se obtuvieron ecuaciones que relacionan los esfuerzos en las paredes de los recipientes con la *presión manométrica p* del fluido contenido. En el caso de un *recipiente cilíndrico* de radio interior r y espesor t (figura 7.51), se dedujeron las expresiones siguientes para los *esfuerzos de costilla* σ_1, y los *esfuerzos longitudinales* σ_2:

Recipientes de presión cilíndrica

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad (7.30, 7.31)$$

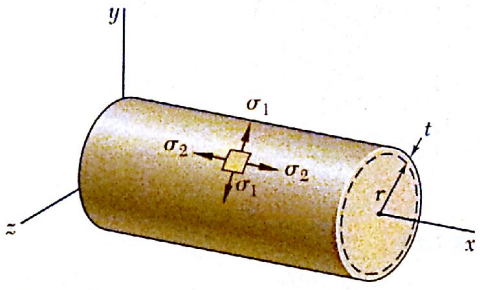


Figura 7.51

También se encontró que el *esfuerzo cortante máximo* ocurre fuera del plano de esfuerzo y es

$$\tau_{\text{máx}} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad (7.34)$$

En el caso de un *recipiente esférico* de radio interior r y espesor t (figura 7.55), se halló que los dos esfuerzos principales son iguales:

Recipientes de presión esférica

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \qquad (7.36)$$

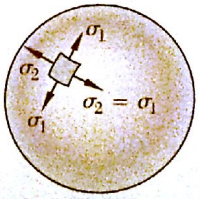


Figura 7.55

De nuevo, el *esfuerzo cortante máximo* ocurre fuera del plano de esfuerzo y es:

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 = \frac{pr}{4t} \qquad (7.37)$$

Transformación de deformación plana

La última parte de este capítulo se dedicó a la *transformación de la deformación*. En las secciones 7.10 y 7.11 se analizó la transformación de *deformación plana* y se introdujo el *círculo de Mohr para deformación plana*. El estudio fue análogo al de la transformación de esfuerzo, excepto que donde se utiliza el esfuerzo cortante τ ahora se usa $\frac{1}{2}\gamma$, es decir, la *mitad de la deformación cortante*. Las ecuaciones obtenidas para la transformación de deformación bajo una rotación de ejes θ, fueron

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.44)$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (7.45)$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y)\operatorname{sen}\ 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \qquad (7.49)$$

Círculo de Mohr para la deformación

Usando el círculo de Mohr para deformación (figura 7.65), también se obtuvieron las relaciones siguientes que definen el ángulo de rotación θ_p que corresponde a los *ejes principales de deformación* y los valores de las *deformaciones principales* $\epsilon_{\text{máx}}$ y $\epsilon_{\text{mín}}$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \qquad (7.52)$$

$$\epsilon_{\text{máx}} = \epsilon_{\text{prom}} + R \quad \text{y} \quad \epsilon_{\text{mín}} = \epsilon_{\text{prom}} - R \qquad (7.51)$$

donde

$$\epsilon_{\text{prom}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (7.50)$$

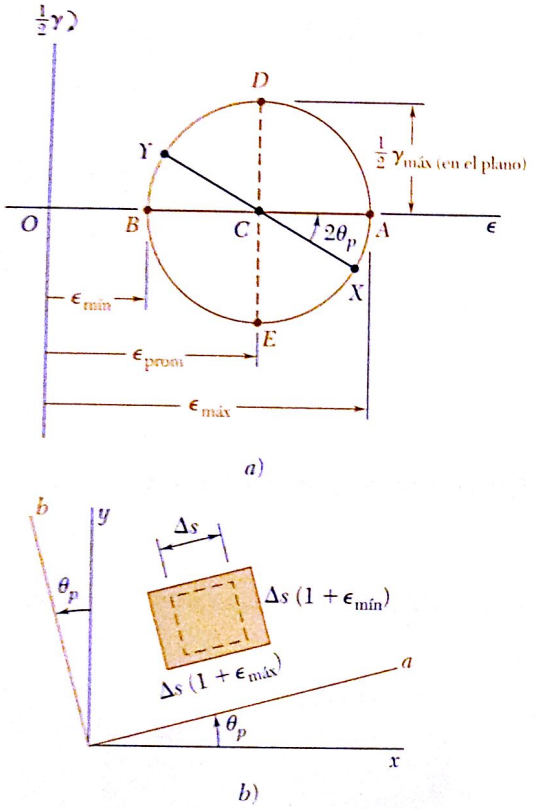


Figura 7.65

La *deformación máxima cortante* para una rotación en el plano de deformación se encontró que era

$$\gamma_{\text{máx (en el plano)}} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (7.53)$$

La sección 7.12 se dedicó al análisis tridimensional de la deformación con aplicación a la determinación de la deformación cortante máxima en los casos particulares de deformación plana y esfuerzo plano. En el caso del *esfuerzo plano*, se encontró también que la deformación principal ϵ_c en una dirección perpendicular al plano de esfuerzo se podría expresar como sigue, en términos de las deformaciones principales en el plano ϵ_a y ϵ_b:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \qquad (7.59)$$

Galgas extensiométricas

Finalmente, se examinó en la sección 7.13 el uso de *galgas extensiométricas* para medir deformaciones normales en la superficie de un elemento estructural o componente de máquina. Considerando una *roseta de deformación* que consta de tres medidores alineados según rectas que forman ángulos θ_1, θ_2 y θ_3 con el eje x (figura 7.80), se escribieron las siguientes relaciones entre las medidas ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 y las componentes ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} que caracterizan el estado de deformación en ese punto:

Roseta de deformación

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2\theta_1 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \\
\epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2\theta_2 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 \\
\epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2\theta_3 + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_3 \cos\theta_3
\end{aligned} \qquad (7.60)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}, una vez que se han determinado ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3.

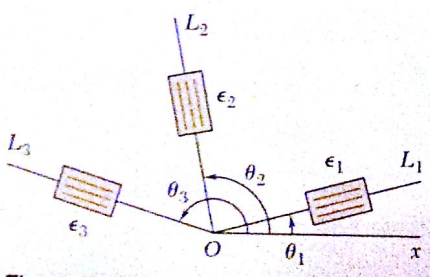


Figura 7.80

PROBLEMAS DE REPASO

7.158 La fibra de un elemento de madera forma un ángulo de 15° con la vertical. Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine *a*) el esfuerzo cortante en el plano paralelo a la fibra, *b*) el esfuerzo normal perpendicular a la fibra.

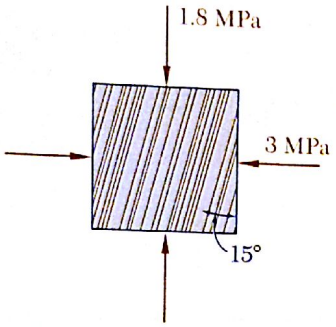


Figura P7.158

7.159 La fuerza céntrica **P** se aplica a un poste corto como se muestra en la figura. Si se sabe que los esfuerzos en el plano *a*-*a* son $\sigma = -15$ ksi y $\tau = 5$ ksi, determine *a*) el ángulo β que forma el plano *a*-*a* con la horizontal, *b*) el esfuerzo máximo a la compresión en el poste.

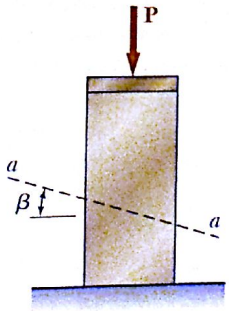


Figura *P7.159*

7.160 El tubo de acero *AB* tiene un diámetro exterior de 102 mm y un espesor de pared de 6 mm. Si se sabe que el brazo *CD* está rígidamente fijo al tubo, determine los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *H*.

7.161 El tubo de acero *AB* tiene un diámetro exterior de 102 mm y un espesor de pared de 6 mm. Si el brazo *CD* está rígidamente fijo al tubo, encuentre los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en el punto *K*.

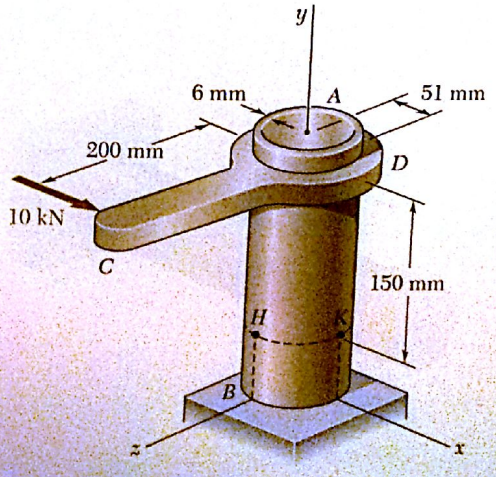


Figura P7.160 y P7.161

7.162 Determine los planos y el esfuerzo principales para el estado de esfuerzo plano resultante de la superposición de los dos estados de esfuerzo que se muestran en la figura.

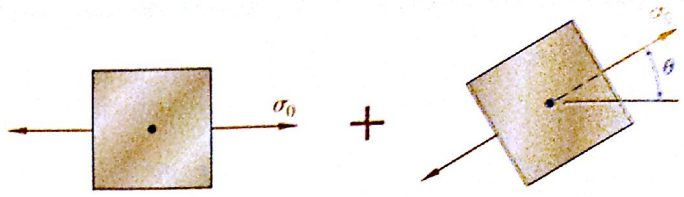


Figura P7.162

7.163 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el rango de valores de θ para los que la magnitud del esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ es menor o igual que 40 MPa.

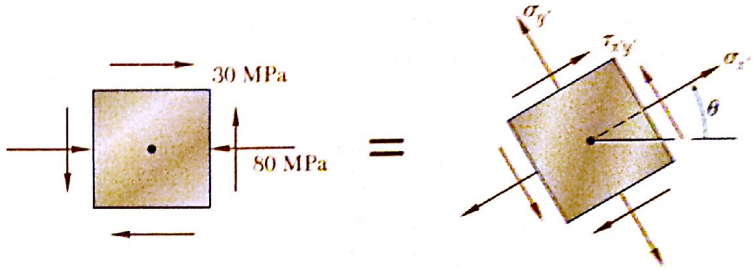


Figura *P7.163*

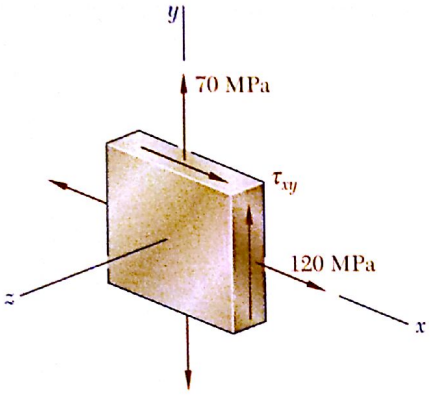


Figura P7.164

7.164 Para el estado de esfuerzo que se muestra en la figura, determine el valor de τ_{xy} para el cual el esfuerzo cortante máximo es de 80 MPa.

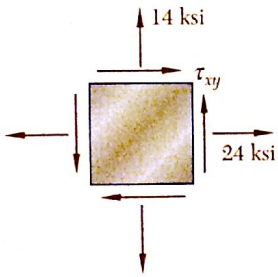


Figura *P7.165*

7.165 El estado de esfuerzo plano que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina de acero con $\sigma_Y = 30$ ksi. Con el criterio de la máxima energía de distorsión determine si ocurre cedencia cuando *a*) $\tau_{xy} = 6$ ksi, *b*) $\tau_{xy} = 12$ ksi, *c*) $\tau_{xy} = 14$ ksi. Si la cedencia no ocurre, determine el factor de seguridad correspondiente.

7.166 Cuando se llena a toda su capacidad, el tanque de almacenamiento no presurizado que se muestra en la figura contiene agua hasta una altura de 48 ft sobre su base. Si se sabe que la porción inferior del tanque tiene un espesor de pared de 0.625 in., determine el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el tanque. (El peso específico del agua es de 62.4 lb/ft^3.)

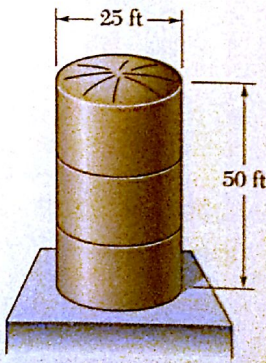


Figura P7.166

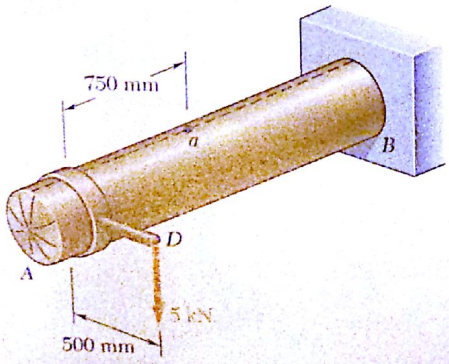


Figura *P7.167*

7.167 El tanque de aire comprimido *AB* tiene un diámetro interior de 450 mm y una pared uniforme de 6 mm de espesor. Si se sabe que la presión manométrica en el tanque es de 1.2 MPa, determine el máximo esfuerzo normal y el máximo esfuerzo cortante en el plano en el punto *a* que se encuentra en la parte superior del tanque.

7.168 El tubo de latón AD pasa dentro de una camisa empleada para aplicar una presión hidrostática de 500 psi sobre la porción BC del tubo. Si se sabe que la presión dentro del tubo es de 100 psi, determine el esfuerzo normal máximo en el tubo.

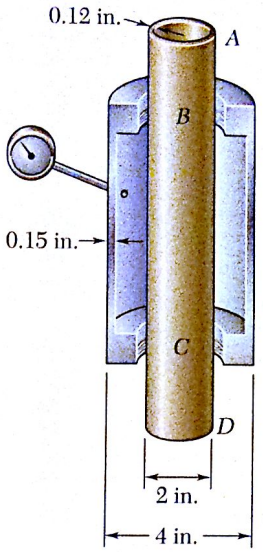


Figura P7.168

7.169 Determine la máxima deformación normal en el plano, si se sabe que mediante el uso de la roseta mostrada en la figura, se obtuvieron las siguientes deformaciones:

$$\epsilon_1 = -50 \times 10^{-6} \text{ in./in.} \qquad \epsilon_2 = +360 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$
$$\epsilon_3 = +315 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

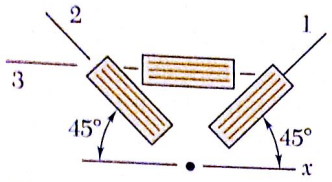


Figura P7.169

PROBLEMAS PARA COMPUTADORA

Los siguientes problemas fueron diseñados para ser resueltos con ayuda de una computadora.

7.C1 Un estado de esfuerzo plano está definido por las componentes de esfuerzo σ_x, σ_y y τ_{xy} asociadas con el elemento de la figura P7.C1*a*. *a*) Escriba un programa para computadora que calcule las componentes de esfuerzo $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ y $\tau_{x'y'}$ asociadas con el elemento después de haberlo girado un ángulo θ alrededor del eje z (figura P7.C1*b*). *b*) Use este programa para resolver los problemas 7.13 a 7.16.

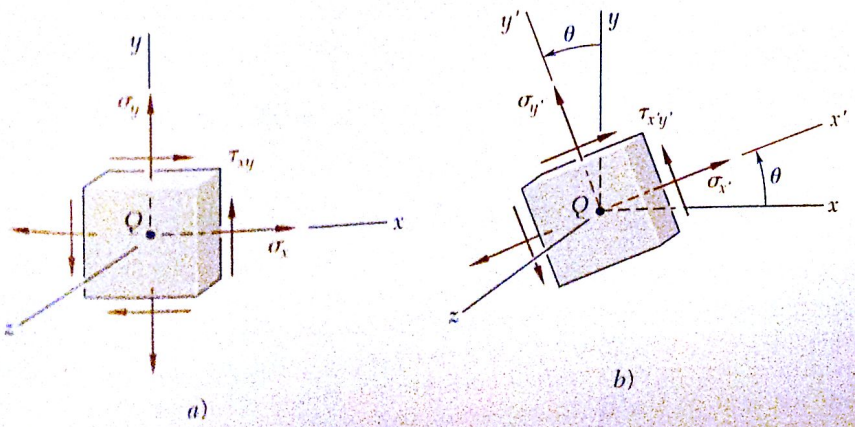


Figura P7.C1